

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT THÀNH PHỐ HỒ CHÍ
MINH**

NGUYỄN THỊ BÍCH LIỄU

**PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN ĐẲNG HÌNH
HỌC ĐỂ PHÂN TÍCH VÀ ĐIỀU KHIỂN ĐÁP ỨNG KẾT CẤU TẮM
NHIỀU LỚP**

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ

**NGÀNH: CƠ KỸ THUẬT
MÃ NGÀNH: 9520101**

Thành phố Hồ Chí Minh, 10/ 2019

**CÔNG TRÌNH ĐƯỢC HOÀN THÀNH TẠI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT THÀNH PHỐ HỒ CHÍ
MINH**

Người hướng dẫn 1: PGS.TS. NGUYỄN XUÂN HÙNG

Người hướng dẫn 2: PGS.TS. ĐẶNG THIỆN NGÔN

Luận án tiến sĩ được bảo vệ trước
HỘI ĐỒNG BẢO VỆ LUẬN ÁN TIẾN SĨ CẤP NHÀ NƯỚC, TRƯỜNG ĐẠI
HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Ngày tháng năm

NHỮNG ĐÓNG GÓP CỦA LUẬN ÁN

Phương pháp số được sử dụng cho luận án là phương pháp phân tích đẳng hình học (IGA). Cách tiếp cận số này được trình bày vào năm 2005 bởi Hughes và cộng sự, tuy nhiên, nó vẫn còn hạn chế ở Việt Nam. IGA đã vượt qua phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) cả về hiệu quả và độ tin cậy đối với việc tính toán các bài toán kỹ thuật khác nhau, đặc biệt đối với các bài toán có hình học phức tạp.

Một lý thuyết biến dạng cắt bậc cao không ràng buộc tổng quát mới (UHSĐT) được đưa ra. Lý thuyết đề xuất không chỉ không ràng buộc ứng suất cắt trên các bề mặt trên và dưới của các tấm bằng 0 mà còn không yêu cầu các hệ số hiệu chỉnh cắt. Lý thuyết này được viết dưới dạng tổng quát của các hàm phân bố. Tác giả đề xuất một hàm phân bố mà nó cung cấp kết quả tốt hơn so với các nghiệm tham khảo.

Thay vì sử dụng IGA truyền thống, tác giả sử dụng IGA dựa trên trích xuất Bézier cho tất cả các chương. Mục đích chính của IGA dựa trên trích xuất Bézier là thay thế các hàm cơ sở B-spline / NURBS (the B-spline or Non-uniform Rational B-spline) phân bố toàn cục bằng các hàm đa thức Bernstein sử dụng cùng một bộ hàm dạng cho mỗi phần tử tương tự như FEM. Như vậy sẽ dễ dàng tích hợp được những code FEM sẵn có trong các phần mềm thương mại. Bằng cách chọn đa thức Bernstein làm hàm cơ sở, IGA sẽ được thực hiện dễ dàng tương tự như cách triển khai trong FEM. Các hàm cơ sở B-spline / NURBS có thể được viết lại dưới dạng kết hợp các đa thức Bernstein và toán tử trích xuất Bézier. Đó được gọi là trích xuất Bézier cho B-spline / NURBS.

Cả đáp ứng tuyến tính và phi tuyến cho bốn loại vật liệu bao gồm tấm composite nhiều lớp, tấm composite nhiều lớp có dán lớp áp điện, tấm vật liệu có lỗ rỗng thay đổi chức năng dán lớp áp điện được gia cường bằng các tấm graphene và tấm vật liệu áp điện thay đổi chức năng có lỗ rỗng được nghiên cứu. Tất cả các bài toán liên quan đến bốn loại vật liệu này được khai thác phân tích và kỹ thuật điều khiển chủ động để điều khiển các đáp ứng tĩnh và động của các loại tấm này cũng được trình bày trong luận án.

Cho đến nay, các nhà nghiên cứu dường như chưa có nghiên cứu đáp ứng của tấm có lỗ rỗng thay đổi chức năng dán lớp áp điện được gia cường bằng các tấm graphene (PFGP-GPLs) sử dụng IGA dựa trên trích xuất Bézier cho cả phân tích tuyến tính và phi tuyến. Tất cả các kết quả đạt được được so sánh với những lời giải giải tích hoặc lời giải số đã được công bố trên những tạp chí quốc tế uy tín.

Một công thức phần tử hữu hạn đẳng hình học dựa trên trích xuất Bézier để phân tích dao động tự do của các tấm vật liệu áp điện chức năng có lỗ rỗng được chứng minh và trình bày. Công thức này được chứng minh lần đầu tiên. Trong công trình gần đây liên quan đến vấn đề này, tác giả đã đưa

ra tần số dao động tự do cho một số hình học phức tạp chưa có giải giải tích hoặc lời giải số nào trước đây đưa ra.

Trong luận án này, tác gi đưa ra nhiều bài toán có hình học phức tạp bằng cách sử dụng kỹ thuật multipatches để tính toán. Điều này khác với các luận án sử dụng IGA trước đây ở Việt Nam.

TÓM TẮT LUẬN ÁN

Luận án bao gồm 7 chương trong đó chương 1 nói về tổng quan nghiên cứu; chương 2 và 3 trình bày công cụ sử dụng tính toán là phương pháp số đẳng hình học dựa trên trích xuất Bézier và cơ sở lý thuyết cho bài toán tấm (bao gồm 4 loại bài toán tấm khác nhau), tương ứng; 4 chương còn lại đưa ra các ví dụ số minh hoạ cho phân tích tĩnh, dao động tự do, đáp ứng của 4 loại vật liệu mô hình tấm cho cả đáp ứng tuyến tính và phi tuyến với các dạng hình học khác nhau từ đơn giản đến phức tạp hơn. Ngoài ra trong các chương ví dụ số còn đưa ra các ví dụ số về điều khiển đáp ứng cho bài toán tấm vật liệu có dán lớp áp điện.

Phân tích đẳng hình học (có tên viết tắt tiếng Anh là IGA) được giới thiệu năm 2005 bởi Hughes và các cộng sự như là một sự đột phá trong tính toán mô phỏng số. Ưu điểm chính của IGA là sử dụng cùng một hàm dạng cơ sở để mô tả hình học và xấp xỉ cả nghiệm số. Nó tích hợp việc thiết kế dựa trên máy tính cũng như công nghệ liên quan đến việc sử dụng hệ thống máy tính để phân tích đối tượng hình học CAD (CAE) và những công cụ số hiệu quả khác để phân tích nhiều lớp bài toán kỹ thuật khác nhau. Chi phí tính toán giảm đáng kể vì hình học chính xác được tạo ra trong CAD, sau đó đưa vào tính toán mà không bị sai số hình học. IGA cho kết quả với độ chính xác cao hơn vì tính trơn và tính liên tục bậc cao hơn giữa các phần tử. Trong một thập kỷ phát triển gần đây, phân tích đẳng hình học đã vượt qua phân tích phần tử hữu hạn (FEM) về tính hiệu quả và độ tin cậy đối với các bài toán khác nhau, đặc biệt đối với các bài toán có hình học phức tạp.

Bởi vì đóng vai trò quan trọng trong nhiều kết cấu kỹ thuật và công nghiệp hiện đại, kết cấu tấm nhiều lớp được sử dụng rộng rãi trong nhiều mảng kỹ thuật khác nhau chẳng hạn như hàng không, đóng tàu, kỹ thuật dân dụng, vv. Kết cấu tấm nhiều lớp có các tính chất cơ học tuyệt vời, bao gồm độ bền và độ cứng cao, khả năng chống mài mòn, trọng lượng nhẹ và nhiều đặc tính khác. Bên cạnh việc sở hữu các đặc tính vật liệu ưu việt, vật liệu tổng hợp nhiều lớp còn cung cấp thiết kế thuận lợi thông qua việc sắp xếp trình tự xếp chồng và độ dày các lớp để có được các đặc tính mong muốn, đó là lý do tại sao chúng nhận được sự quan tâm nghiên cứu đáng kể của nhiều nhà nghiên cứu trên toàn thế giới.

Trong luận án này, một công thức phần tử hữu hạn đẳng hình học được phát triển dựa trên trích xuất Bézier để giải quyết các bài toán tấm khác nhau, sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao 7 bậc tự do cho cả phân tích và điều khiển đáp

ứng của các cấu trúc tấm. Một điểm mới trong luận án này là sử dụng trích xuất Bézier. Trong phân tích đẳng hình học thông thường, các hàm cơ sở B-spline hoặc hàm trải rộng trên toàn bộ miền của các cấu trúc chứ không chỉ là một miền cục bộ như các hàm hình dạng Lagrangian trong FEM. Việc hàm dạng phân bố toàn cục như vậy gây ra việc thực hiện tính toán phức tạp. Do đó sử dụng trích xuất Bézier được coi là giải pháp khắc phục nhược điểm của hàm đệ quy NURBS và có thể tích hợp được vào những code FEM sẵn có.

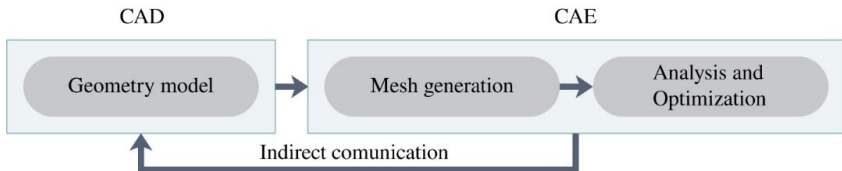
Mặc dù IGA phù hợp với các bài toán có tính liên tục bậc cao, nghiên cứu sinh sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao với liên tục C^0 , 7 bậc tự do, để thống nhất cho tất cả các chương. Để có sự thống nhất của các biến xấp xỉ, trong một số hình học phức tạp với các điều kiện biên đối xứng, thường khó áp điều kiện biên cho các thành phần đạo hàm nên trong luận văn này nghiên cứu sinh sử dụng IGA dựa trên trích xuất Bézier với 7 bậc tự do cho mỗi nút.

Hơn nữa, nghiên cứu sinh nghiên cứu cả đáp ứng tuyến tính và phi tuyến cho bốn loại vật liệu bao gồm tấm composite nhiều lớp, tấm composite nhiều lớp có lớp áp điện, tấm vật liệu chức năng dán lớp áp điện có lỗ rỗng được gia cường bằng các tấm graphene và tấm vật liệu áp điện chức năng có lỗ rỗng. Các thuật toán điều khiển cái dựa trên các tín hiệu phản hồi chuyên vị và vận tốc không đổi được áp dụng để điều khiển đáp ứng tĩnh và động của tấm cho cả tuyến tính và phi tuyến hình học, trong đó hiệu ứng của giảm chấn cấu trúc được xem xét, dựa trên điều khiển kín với các cảm biến và bộ truyền động áp điện. Các kết quả đạt được của phương pháp đề xuất phù hợp tốt với các lời giải giải tích và một số phương pháp tiếp cận có sẵn khác. Thông qua phân tích phần ví dụ số, các kết quả đạt được chỉ ra rằng phương pháp được đề xuất đạt được độ tin cậy cao khi so với các giải pháp khác đã được công bố trên các tạp chí uy tín. Ngoài ra, một số lời giải số cho các tấm vật liệu chức năng dán lớp áp điện có lỗ rỗng được gia cường bằng các tấm graphene và tấm vật liệu áp điện chức năng có lỗ rỗng có thể được coi là nguồn tài liệu tham khảo cho những nghiên cứu khác trong tương lai vì cho đến nay vẫn chưa có lời giải giải tích nào đưa ra.

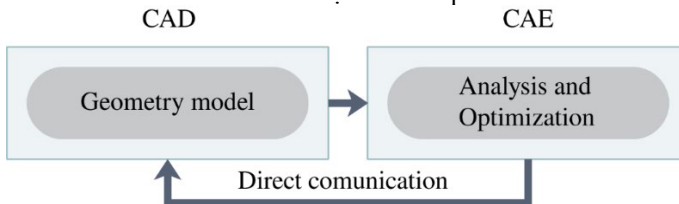
CHƯƠNG 1: TỔNG QUAN

1.1 Tổng quan về phân tích đẳng hình học (IGA)

Năm 2005, Hughes, Cottrell & Bazilevs đã giới thiệu một kỹ thuật mới, có tên là phân tích đẳng hình học (IGA). Ưu điểm chính của phương pháp này là có khả năng tính toán trực tiếp cơ sở dữ liệu được lấy từ các chương trình thiết kế hình học như Catia, Auto Cad, Rhino,.... Điều này được thực hiện bằng cách sử dụng cùng các hàm cơ sở mô tả hình học trong CAD (tức là B-splines / NURBS) luôn để xấp xỉ nghiệm số. Có thể thấy rằng trong Hình 1.1, sự tương tác trực tiếp từ mô hình hình học đến phân tích là không thể, quá trình phân tích phần tử hữu hạn (FEA) phải thông qua việc chia lưới để xấp xỉ hình học, và do đó thông tin chính xác của mô tả hình học ban đầu không bao giờ đạt được. Tuy nhiên, trong Hình 1.2, bỏ qua bước chia lưới, hình học phân tích là hình học chính xác vì thế không có sai số hình học. Kỹ thuật này dẫn đến sự hợp tác tốt hơn giữa FEA và CAD. Kể từ bài báo đầu tiên và cuốn sách IGA xuất bản năm 2009, một số lượng lớn nghiên cứu đã được thực hiện về chủ đề này và áp dụng thành công cho nhiều bài toán từ phân tích cấu trúc, tương tác cấu trúc chất lỏng, điện tử và phương trình vi phân từng phần bậc cao.



Hình 1.1: Sơ đồ phân tích phần tử hữu hạn. Bởi vì chia lưới, miền tính toán chỉ là hình học CAD xấp xỉ.



Hình 1.2: Sơ đồ phân tích trong IGA. Không cần chia lưới, miền tính toán là hình học chính xác.

1.2 Tổng quan về vật liệu sử dụng trong luận án

Trong luận án này, bốn loại vật liệu được xem xét bao gồm tấm composite nhiều lớp, tấm composite nhiều lớp có dán lớp áp điện, tấm có lỗ rỗng thay đổi chức năng dán lớp áp điện được gia cường bằng các tấm graphene (PFGP-GPLs) và tấm vật liệu áp điện chức năng có lỗ rỗng (FGPMP).

1.2.1. Tấm composite nhiều lớp

Tấm - cấu trúc nổi tiếng, thông dụng và là một phần quan trọng của nhiều cấu trúc kỹ thuật. Chúng được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực như dân dụng, kỹ thuật hàng không, vũ trụ, kỹ thuật ô tô và nhiều lĩnh vực khác. Một trong những cấu trúc tấm thường được sử dụng và nghiên cứu hiện nay là tấm composite nhiều lớp. Các tấm composite nhiều lớp có các tính chất cơ học tuyệt vời. Bên cạnh việc sở hữu các đặc tính vật liệu ưu việt, vật liệu tổng hợp nhiều lớp còn cung cấp thiết kế thuận lợi thông qua trình tự xếp chồng các lớp và độ dày của từng lớp để có được các đặc tính cơ học mong muốn cho nhiều ứng dụng kỹ thuật, điều đó giải thích lý do tại sao chúng nhận được sự chú ý đáng kể của nhiều nhà nghiên cứu trên toàn thế giới. Điều quan trọng hơn, hiệu quả sử dụng của chúng phụ thuộc vào việc nghiên cứu triệt để ứng xử uốn cong, sự phân phối ứng suất và dao động tự nhiên. Do đó, nghiên cứu các phản ứng tĩnh và động của chúng là thực sự cần thiết cho các ứng dụng kỹ thuật trên.

1.2.2. Tấm composite nhiều lớp có dán lớp áp điện

Vật liệu áp điện là một trong những loại vật liệu thông minh, trong đó các tính chất điện và cơ học đã được ghép nối. Một trong những tính năng chính của vật liệu áp điện là khả năng thực hiện chuyển đổi giữa năng lượng điện và cơ năng. Theo đó, khi một cấu trúc được dán các lớp áp điện chịu tải trọng cơ học, vật liệu áp điện có thể tạo ra điện. Ngược lại, cấu trúc có thể được thay đổi hình dạng nếu đặt một điện trường. Do tính chất cơ học và điện, các vật liệu áp điện đã được áp dụng rộng rãi để tạo ra các cấu trúc thông minh trong lĩnh vực hàng không, vũ trụ, ô tô, quân sự, y tế và các lĩnh vực khác. Liên quan đến tấm tích hợp với các lớp áp điện, có nhiều phương pháp số khác nhau được đưa ra để dự đoán ứng xử của chúng.

1.2.3. Tấm có lỗ rỗng thay đổi chức năng dán lớp áp điện được gia cường bằng các tấm graphene (PFGP-GPLs).

Các vật liệu xốp (vật liệu có lỗ rỗng) có đặc tính như nhẹ, hấp thụ năng lượng tuyệt vời, kháng nhiệt đã được sử dụng rộng rãi trong các lĩnh vực kỹ thuật khác nhau bao gồm như hàng không, vũ trụ, ô tô, y sinh và các lĩnh vực khác. Tuy nhiên, sự tồn tại của lỗ rỗng bên trong dẫn đến giảm đáng kể độ cứng cấu trúc. Để khắc phục nhược điểm này, việc gia cố bằng các ống nano carbon như ống nano carbon (CNTs) và các tấm graphene (GPL) vào vật liệu xốp là một lựa chọn tuyệt vời và thiết thực để tăng cường các tính chất cơ học của chúng.

Trong những năm gần đây, các vật liệu xốp được gia cố bởi GPLs đã được các nhà nghiên cứu chú ý nhiều do các đặc tính ưu việt của chúng hơn so với các ống nano carbon. Các vật liệu xốp nhân tạo như bột kim loại có sự kết hợp của cả hai tính chất vật lý và đặc tính cơ học đã được áp dụng phổ biến trong các vật liệu cấu trúc nhẹ và vật liệu sinh học. Các GPL được gia cường một cách phân tán trong các vật liệu để tăng khả năng làm việc của kết cấu cũng như độ cứng của chúng trong khi trọng lượng của các kết cấu giảm theo độ xốp. Với các ưu điểm kết hợp của cả GPL và lỗ rỗng, các tính chất cơ học của vật liệu được gia tăng đáng kể nhưng vẫn duy trì được ưu điểm của các cấu trúc nhẹ.

1.2.4. Tấm vật liệu áp điện chức năng có lỗ rỗng (FGPMP)

Các vật liệu áp điện truyền thống thường được tạo ra từ một số lớp vật liệu áp điện khác nhau hoặc các tấm composite nhiều lớp được tích hợp (dán) với 2 lớp áp điện đóng vai trò là cảm biến áp điện và bộ truyền động để điều khiển dao động. Mặc dù có những ưu điểm nổi bật và ứng dụng rộng rãi, nhưng chúng vẫn còn một số nhược điểm như nứt, tách lớp và có sự tập trung ứng suất tại ngay chỗ tiếp giáp các lớp. Như đã biết, các vật liệu phân lớp theo chức năng (FGM) là một loại cấu trúc composite hỗn hợp mới đã thu hút sự chú ý của nhiều nhà nghiên cứu trong những năm gần đây. Các tính chất vật liệu của FGM thay đổi liên tục theo độ dày của các tấm bằng cách trộn hai vật liệu khác nhau. Vì vậy, FGM sẽ giảm hoặc thậm chí loại bỏ một số nhược điểm của vật liệu composite nhiều lớp áp điện. Dựa trên khái niệm FGM, sự kết hợp giữa hai loại vật liệu áp điện theo một hướng sẽ thu được các vật liệu áp điện phân lớp chức năng (FGPM), có nhiều đặc tính nổi bật so với vật liệu áp điện truyền thống. Do đó, FGPM thu hút sự chú ý mạnh mẽ của các nhà nghiên cứu để phân tích và thiết kế các thiết bị thông minh trong những năm gần đây.

1.3. Mục tiêu của luận văn

Luận án tập trung vào sự phát triển của các phương pháp phần tử hữu hạn đẳng hình học để phân tích và điều khiển đáp ứng của các cấu trúc tấm nhiều lớp. Vì vậy, có hai mục tiêu chính được nghiên cứu. Thứ nhất, một công thức đẳng hình học mới dựa trên trích xuất Bézier để phân tích các cấu trúc tấm composite được trình bày. Tác giả nghiên cứu ba dạng bài toán bao gồm tĩnh, rung tự do và phân tích đáp ứng transient cho các cấu trúc tấm nhiều lớp bao gồm: tấm composite nhiều lớp, tấm composite nhiều lớp có dán lớp áp điện, tấm có lỗ rỗng thay đổi chức năng dán lớp áp điện được gia cường bằng các tấm graphene (PFPG-GPLs) và tấm vật liệu áp điện chức năng có lỗ rỗng (FGPMP). Thứ hai, một thuật toán điều khiển chủ động đáp ứng được sử dụng để điều khiển đáp ứng tĩnh và đáp ứng động học tức thời của các tấm nhiều lớp áp điện trong cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến.

1.4. Cấu trúc luận án

Luận án bao gồm bảy chương và được bố trí như sau: **Chương 1:** Giới thiệu và lịch sử phát triển của IGA được đưa ra. Tình hình nghiên cứu của bốn loại vật liệu được sử dụng trong luận án này, tác giả có những đóng góp gì và mục tiêu cũng như tính mới của luận án cũng được mô tả rõ ràng. Và, các chương mục của luận án được đề cập để người đọc có cái nhìn tổng quát về nội dung của luận án. **Chương 2:** Trình bày về phương pháp phần tử hữu hạn đẳng hình học (IGA), bao gồm các hàm cơ sở B-spline, các hàm cơ sở NURBS, các đường cong NURBS, bề mặt NURBS, hình học B-spline và làm mịn. Hơn nữa, trích xuất Bézier và so sánh với phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) cũng được trình bày trong chương này. Ưu điểm và nhược điểm của IGA cũng được đưa ra. **Chương 3:** Tổng quan về các lý thuyết tấm và mô tả các thuộc tính vật liệu được sử dụng cho các chương tiếp theo được đưa ra. Thứ nhất, mô tả nhiều lý thuyết tấm bao

gồm một số lý thuyết tấm được áp dụng trong các chương. Thứ hai, trình bày bốn loại vật liệu trong luận án này bao gồm tấm composite nhiều lớp, tấm composite nhiều lớp có dán lớp áp điện, tấm có lỗ rỗng thay đổi chức năng dán lớp áp điện được gia cường bằng các tấm graphene (PFGP-GPLs) và tấm vật liệu áp điện chức năng có lỗ rỗng (FGPMP). **Chương 4:** Đây là chương đầu tiên của phần ví dụ số. Tác giả trình bày các kết quả thu được cho phân tích tĩnh, dao động tự do và phân tích đáp ứng tức thời của tấm composite nhiều lớp với nhiều dạng hình học, hướng của các lớp lamina và các điều kiện biên khác nhau sử dụng lý thuyết không ràng buộc bậc cao tổng quát mới (UHSDT). IGA dựa trên trích xuất Bézier được sử dụng cho tất cả các chương. Ngoài ra, hai lớp áp điện được dán ở bề mặt trên và dưới của tấm composite nhiều lớp cũng được xem xét để phân tích tĩnh, dao động tự do và phân tích đáp ứng. Sau đó, đề điều khiển đáp ứng tĩnh và động, thuật toán điều khiển phản hồi chuyển vị và vận tốc được thực hiện. Các ví dụ bằng số trong chương này cho thấy độ chính xác và độ tin cậy của phương pháp được đề xuất. **Chương 5:** Lần đầu tiên một công thức phân tử hữu hạn Bézier được đưa ra cho phân tích tĩnh và động học của các tấm có lỗ rỗng thay đổi chức năng dán lớp áp điện được gia cường bằng các tấm graphene (PFGP-GPLs). Ảnh hưởng của phân số trọng lượng và mô hình phân bố của GPL, hệ số và loại phân phối của lỗ rỗng, cũng như điện áp bên ngoài đối với các ứng xử cấu trúc được nghiên cứu thông qua một số ví dụ số. Những kết quả này, chưa được thu được trước đây, có thể được coi là giải pháp tham khảo cho các công trình trong tương lai. Trong chương này, nghiên cứu sinh mở rộng phân tích về các đáp ứng tĩnh và động học phi tuyến của tấm PFGP-GPL. Sau đó, thuật điều khiển hồi tiếp chuyển vị và vận tốc không đổi được áp dụng để điều khiển chủ động phi tuyến hình học cũng như các phản ứng động của các tấm, trong đó hiệu ứng của giảm chấn cấu trúc được xem xét, dựa trên điều khiển vòng kín. **Chương 6:** Để khắc phục một số nhược điểm của cấu trúc tấm nhiều lớp có dán các lớp áp điện như nứt, tách lớp và sự tập trung ứng suất tại các lớp giao diện, tác giả giới thiệu trong chương này các tấm vật liệu áp điện chức năng có lỗ rỗng (FGPMP). Các đặc tính vật liệu của tấm áp điện chức năng phân bố liên tục theo độ dày thông qua công thức định luật điện biến đổi. Hai mô hình lỗ rỗng, phân bố đều và không đồng đều, được sử dụng. Để thỏa mãn phương trình Maxwell, trong phép tính gần đúng tĩnh, một trường điện thế ở dạng hỗn hợp cosin và biến đổi tuyến tính được sử dụng. Ngoài ra, nghiên cứu sinh còn nghiên cứu thêm một số tấm FGPMP với hình học phức tạp, mà chưa có lời giải giải tích. Các kết quả có thể được coi là một lời giải tham khảo cho các công trình nghiên cứu trong tương lai. **Chương 7:** Cuối cùng, chương này trình bày các nhận xét kết luận và một số khuyến nghị cho công việc trong tương lai.

CHAPTER 2: ISOGOMETRIC ANALYSIS FRAMEWORK

2.1. Ưu điểm của IGA so với FEM

Thứ nhất, miền tính toán được bảo toàn chính xác tại tất cả các cấp lưới bất kể lưới thô hay lưới mịn. Trong lĩnh vực cơ học tiếp xúc, tính chất này đưa đến việc đơn giản hóa phát hiện tiếp xúc tại mặt chung của hai bề mặt tiếp xúc, đặc biệt là trong trường hợp biến dạng lớn khi đó vị trí tương đối của hai bề mặt này thường thay đổi đáng kể. Bên cạnh đó, tiếp xúc trượt giữa các mặt có thể được mô phỏng lại một cách chính xác. Tính chất này cũng hữu ích cho các bài toán nhạy với các sai lệch hình học như phân tích bất ổn định của tấm vỏ hoặc hiệu ứng lớp biên trong phân tích động lực học chất lỏng. Thứ hai, các mô hình CAD dựa trên NURBS làm cho bước tạo lưới được thực hiện tự động mà không cần phải tinh giản hoặc loại bỏ các đặc trưng hình học. Điều này có thể dẫn đến việc giảm đáng kể khoảng thời gian dành ra cho các bước chia lưới và đơn giản hoá hình học, chiếm khoảng 80% tổng thời gian phân tích của một bài toán. Thứ ba, làm mịn lưới rất dễ dàng và ít tốn thời gian do thao tác trực tiếp trên hình học CAD. Lợi thế này bắt nguồn từ việc sử dụng chung hàm dạng cho cả mô hình hóa và phân tích. Chúng ta có thể dễ dàng xác định chính xác vị trí để chia nhỏ hình học và việc làm mịn lưới của miền tính toán được đơn giản hóa thành thuật toán chèn knot được thực hiện tự động. Các phần được phân chia này sau đó trở thành các phần tử mới và do đó, lưới được giữ chính xác. Cuối cùng, sự liên tục bậc cao giữa các phần tử với tối đa C^{p-1} trong trường hợp không có knot lặp làm cho phương pháp phù hợp một cách tự nhiên đối với các vấn đề cơ học có các đạo hàm bậc cao trong công thức như tấm vỏ Kirchhoff-Love, gradient elasticity, phương trình Cahn-Hilliard trong tách pha. Đặc điểm này là kết quả của việc sử dụng trực tiếp các hàm cơ sở B-spline / NURBS cho phân tích. Trái ngược với các hàm cơ sở trong FEM cổ điển, được định nghĩa cục bộ bên trong phần tử và có độ liên tục C^0 trên biên phần tử (và do đó xấp xỉ số là C^0), các hàm cơ sở IGA không chỉ nằm trong một phần tử (khoảng knot). Thay vào đó, các hàm này được định nghĩa qua một vài phần tử liên kế để đảm bảo được tính liên tục và kết nối cao hơn và do đó, xấp xỉ số đạt được liên tục bậc cao. Một lợi ích khác của liên tục bậc cao là tốc độ hội tụ cao hơn so với các phương pháp thông thường, đặc biệt là khi nó được kết hợp với một kỹ thuật làm mịn mới, được gọi là k -refinement. Tuy nhiên, cần lưu ý là mặc dù hàm cơ sở IGA có miền bao phủ lớn hơn nhưng không dẫn đến sự tăng băng thông trong xấp xỉ số và do đó băng thông của ma trận thưa được duy trì như trong các hàm cơ sở FEM cổ điển.

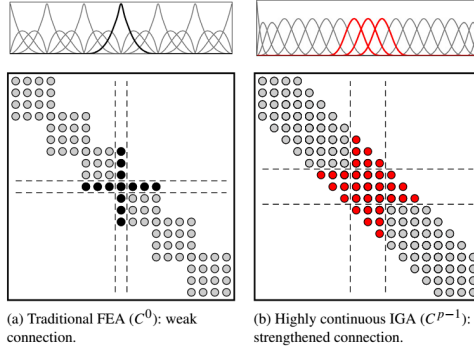
2.2. Nhược điểm của IGA

Phương pháp này, tuy nhiên, cũng có một số nhược điểm như sau:

Thách thức đáng kể nhất của việc sử dụng B-splines / NURBS trong IGA là cấu trúc sản phẩm tenor của nó không cho phép sàng lọc cục bộ thực sự, bất kỳ thao tác chèn nút nào cũng sẽ dẫn đến sự lan truyền toàn cầu trên miền tính toán.

Ngoài ra, do thiếu thuộc tính delta Kronecker, việc áp dụng điều kiện biên Dirichlet không đồng nhất hoặc trao đổi lực / dữ liệu vật lý trong phân tích kết hợp có liên quan nhiều hơn một chút.

Hơn nữa, nhờ có sự hỗ trợ lớn hơn của các hàm cơ sở IGA, các ma trận hệ thống kết quả tương đối dày đặc hơn (chứa nhiều mục nhập khác) khi so sánh với FEM và cấu trúc dải ba đường chéo cũng bị mất (giống như hình mô tả bên dưới).



Hình 2.1: Minh họa tính liên tục bậc cao của hàm cơ sở trong IGA dày đặc hơn so với FEM

2.3. Hàm cơ sở NURBS

Một đường cong NURBS được xây dựng bằng cách nhân mỗi tọa độ thành phần của điểm điều khiển thuộc lưới điều khiển \mathbf{P}_i với một trọng số vô hướng dương nhất định w_i và hàm trọng số $W(\xi)$ được định nghĩa như sau

$$W(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i, \quad (2.1)$$

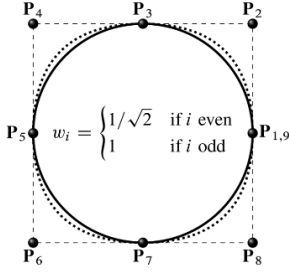
đưa đến

$$\mathbf{C}(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i w_i}{W(\xi)} = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) \mathbf{P}_i, \quad (2.2)$$

trong đó $R_i^p(\xi)$ là hàm cơ sở NURBS một chiều được định nghĩa bởi

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{W(\xi)}. \quad (2.3)$$

Hình 2.1 minh họa hai vòng tròn được biểu diễn bằng cả NURBS và B-spline tương ứng với đường nét liền và đường nét đứt. Các điểm điều khiển của chúng được biểu diễn bằng các hình cầu màu đen với các trọng số đi theo cũng được chú thích cho trường hợp NURBS. Có thể thấy rõ là chỉ có đường cong NURBS có thể biểu diễn chính xác vòng tròn.



Hình 2. 2: Hai cách biểu diễn của vòng tròn. Đường cong nét liền được tạo ra bởi NURBS mô tả chính xác vòng tròn trong khi đường cong nét đứt xây dựng bởi B-splines không thể tạo ra một vòng tròn chính xác.

Hầu hết các thuộc tính của B-Splines vẫn đúng cho NURBS. Trong trường hợp các trọng số bằng nhau $w_i = const, \forall i = 1, \dots, n$ NURBS trở thành B-Splines. Đạo hàm của hàm dạng NURBS phức tạp hơn nhiều so với B-Splines và được đề cập chi tiết trong Tiêu mục 2.5.2 trong luận án. Một số tính chất quan trọng của NURBS được liệt kê như sau:

- Đối với các vectơ knot mở, các hàm cơ sở NURBS tạo thành một phân hoạch đơn vị $\sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) = 1, \forall \xi$.
- Độ liên tục và vùng bao phủ của các hàm cơ sở NURBS giống như đối với B-splines.
- Hàm dạng NURBS có tính chất không âm từng phần
- NURBS có thể biểu chính xác một tập lớn các đường cong, ví dụ: các đường conic.

Mặt NURBS được định nghĩa như sau

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{i,j}, \quad (2.4)$$

trong đó các hàm cơ sở NURBS trong không gian tham số hai chiều được xác định bởi

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{W(\xi, \eta)}, \quad (2.5)$$

với hàm trọng số hai chiều ở mẫu số được cho bởi

$$W(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}, \quad (2.6)$$

và $w_{i,j}$ là trọng số đi kèm mỗi điểm điều khiển của lưới điều khiển $m \times n \mathbf{P}_{i,j}$. Một trong những mặt conic thường gặp trong mô hình là tám tròn và nó có thể được mô tả chính xác bằng mặt NURBS như minh họa trong Hình 2.2. Thông thường,

có hai cách tiếp cận để tham số hóa mặt tròn NURBS ở mức lưới thô. Cách đầu tiên được minh họa ở bên trái trong đó mười tám điểm điều khiển được sử dụng tạo ra bốn phần tử trong khi cách thứ hai được minh họa ở bên phải trong đó chỉ cần chín điểm điều khiển và chỉ tạo ra một phần tử. Lưu ý là mỗi phương pháp tiếp cận tham số hóa đều đều tồn tại các điểm suy biến. Hình bên trái có một điểm suy biến ở tâm của mặt tròn nơi chín điểm kiểm soát trùng nhau tại cùng một vị trí và hình bên phải có bốn điểm suy biến tại bốn điểm điều khiển P_1, P_3, P_7, P_9 . Thông thường, trong phân tích, mô hình bên phải được lựa chọn do cách tham số hóa tốt hơn. Một mặt cắt hình nón khác thường gặp trong thiết kế là tấm hình khuyên được thể hiện trong Hình 2.3. Điều quan trọng cần lưu ý là cách dựng hình này đưa đến một đường chung bên trong (được biểu thị bằng đường màu đỏ) trong đó các điểm điều khiển đầu tiên và cuối cùng theo phương chu vi nằm trùng nhau. Khi thực hiện phân tích ta cần chú ý đến vấn đề này và tìm ra một cách thích hợp để xử lý các biến điều khiển liên quan đến các điểm điều khiển này.

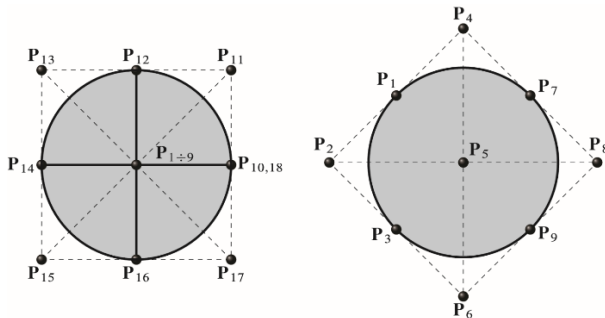


Figure 2.3: Hai cách biểu diễn của cùng một tấm tròn.

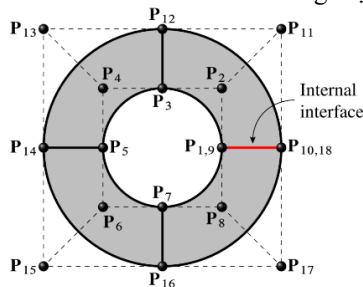


Figure 2.4: Một tấm hình vành khuyên được biểu diễn bằng mặt NURBS.

2.4. Trích xuất Bézier

2.4.1. Giới thiệu về trích xuất Bézier

Cách tiếp cận thông thường để phát triển chương trình phân tích dựa trên IGA như được mô tả trong các phần đã nêu ở trên bộc lộ một số nhược điểm cản trở việc tích hợp IGA với cơ sở phần tử hữu hạn hiện có. Trở ngại rõ ràng là theo cách tiếp cận này, mỗi phần tử có một số hàm cơ sở B-spline khác nhau, trái ngược với FEA trong đó các hàm cơ sở giống nhau được sử dụng cho mỗi phần tử. Chúng ta biết rằng mỗi đường cong B-spline có thể được biểu thị dưới dạng các đường cong Bézier được nối lại với nhau. Điều đó có nghĩa là có thể chuyển đổi một mảnh B-spline thành một tập hợp các phần tử Bézier và sử dụng các phần tử này như là đại diện phần tử hữu hạn của B-spline hoặc NURBS.

2.4.2. Phân rã Bézier và trích xuất Bézier

Theo đó, cùng một đường cong có thể được mô tả bằng hai công thức tương đương như sau

$$\mathbf{C}(\xi) = \mathbf{N}^T \mathbf{P} = \mathbf{B}^T \mathbf{P}^b, \quad (2.7)$$

trong đó \mathbf{N}^T và \mathbf{B}^T là các vector của các hàm cơ sở B-spline và Bézier, tương ứng với các điểm điều khiển liên quan được biểu thị lần lượt bởi vector \mathbf{P} và $\bar{\mathbf{P}}$. Quy trình xác định các đường cong Bézier riêng lẻ từ đường cong B-spline có tên là *phân rã Bézier*. Quá trình phân rã Bézier thường được thực hiện thông qua việc chèn knot bằng cách chèn thêm các knot đã có sẵn cho đến khi bội số của chúng bằng bậc đa thức và do đó độ liên tục tại các knot này bằng C^0 .

Cho một vector knot $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ và một tập hợp các điểm điều khiển $\mathbf{P} = \{\mathbf{P}_i\}_{i=1}^n$ định nghĩa một đường cong B-spline. Bằng cách áp dụng kỹ thuật chèn knot cho một tập hợp các knot $\{\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_j, \dots, \bar{\xi}_m\}$ cần được lặp lại để tạo ra phân rã Bézier từ đường cong B-spline, ta có thể viết

$$\bar{\mathbf{P}}^{j+1} = (\mathbf{C}^j)^T \mathbf{P}^j, \quad (2.8)$$

trong đó $\bar{\mathbf{P}}^1 = \mathbf{P}$. Eq. (2. 8) thu được khi chèn một knot đơn $\bar{\xi}_j, j = 1, 2, \dots, m$ vào vector knot gốc và ma trận \mathbf{C}^j được định nghĩa như sau

$$\mathbf{C}^j = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1-\alpha_2 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1-\alpha_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 1-\alpha_4 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & & & 0 & \alpha_{(n+j-1)} & 1-\alpha_{(n+j)} \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

với $\alpha_i^j, i = 1, 2, \dots, n+j$ là alpha thứ i . Bằng cách thực hiện phép biến đổi được định nghĩa trong biểu thức (2. 9) cho mỗi knot được chèn vào $\bar{\xi}_j$, ta có được tập

các điểm điều khiển cuối cùng $\bar{\mathbf{P}}^{m+1}$ định nghĩa các đoạn Bézier của phép phân rã. Đặt $\mathbf{P}^b = \bar{\mathbf{P}}^{m+1}$, đồng thời định nghĩa $\mathbf{C}^T = (\mathbf{C}^m)^T (\mathbf{C}^{m-1})^T \dots (\mathbf{C}^1)^T$, ta được

$$\underbrace{\mathbf{P}^b}_{(n+m) \times d} = \underbrace{\mathbf{C}^T}_{n \times (n+m)} \underbrace{\mathbf{P}}_{n \times d}, \quad (2.10)$$

là các tổ hợp tuyến tính lồi của các điểm điều khiển của đường cong B-spline, \mathbf{P} và \mathbf{C} là một ma trận được gọi là *toán tử trích xuất Bézier* trong đó các hàng cộng lại với nhau bằng một do tính chất của tổ hợp lồi. Điều cần lưu ý là thông tin cần thiết để xây dựng ma trận \mathbf{C} chỉ là vector knot, có nghĩa là toán tử này đúng cho cả B-splines và NURBS. Bằng cách kết hợp hai phương trình (2. 7) và (2. 10), công thức liên hệ giữa hàm cơ sở B-spline và hàm cơ sở Bernstein được biểu diễn như sau

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{N}^T \mathbf{P} &= \mathbf{B}^T \mathbf{P}^b \\ \mathbf{P}^b &= \mathbf{C}^T \mathbf{P} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{N}^T \mathbf{P} = \mathbf{B}^T \mathbf{C}^T \mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{N} = \mathbf{C} \mathbf{B}. \quad (2.11)$$

Do đó, các hàm cơ sở B-Spline có thể thu được bằng cách nhân ma trận \mathbf{C} với các hàm cơ sở Bézier (cơ sở Bernstein). Bằng lợi thế của phương pháp này, việc kết hợp IGA với cơ sở FEA hiện có được đơn giản hóa thành việc phát triển một phần tử sử dụng cơ sở Bernstein và có một tham số để đưa vào ma trận trích xuất Bézier. Đối với NURBS, quy trình áp dụng toán tử trích xuất được thực hiện như sau.

Công thức của các hàm trọng số được xác định trong biểu thức (2. 1) có thể được viết lại dưới dạng ma trận như sau

$$\mathbf{W}(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{w}_i = \mathbf{N}^T \mathbf{w} = (\mathbf{C} \mathbf{B})^T \mathbf{w} = \mathbf{B}^T \mathbf{C}^T \mathbf{w} = \mathbf{B}^T \mathbf{w}^b = \mathbf{W}^b, \quad (2.12)$$

trong đó $\mathbf{w}^b = \mathbf{C}^T \mathbf{w}$ là các trọng số tương ứng của các hàm cơ sở Bernstein. Viết lại biểu thức (2. 3) ở dạng ma trận, ta có

$$\mathbf{R}(\xi) = \frac{1}{\mathbf{W}(\xi)} \mathbf{W} \mathbf{N}(\xi), \quad (2.13)$$

với \mathbf{W} là ma trận đường chéo chứa trọng số của các điểm điều khiển và được định nghĩa là

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_n \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Thay thế ma trận \mathbf{N} trong phương trình (2. 13) bởi quan hệ trong biểu thức (2. 11) đem lại công thức biểu diễn cơ sở NURBS theo cơ sở Bernstein như sau

$$\mathbf{R}(\xi) = \frac{1}{W(\xi)} \mathbf{WCB}(\xi). \quad (2.15)$$

Quan hệ giữa các điểm điều khiển NURBS, \mathbf{P} , và các điểm điều khiển Bézier, \mathbf{P}^b được định nghĩa như dưới đây

$$\mathbf{P}^b = \left(\mathbf{W}^b\right)^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{W} \mathbf{P}, \quad (2.16)$$

trong đó \mathbf{W}^b là dạng ma trận đường chéo của trọng số Bézier được hình thành từ dạng vectơ \mathbf{w}^b như sau

$$\mathbf{W}^b = \begin{bmatrix} w_1^b & & & \\ & w_2^b & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_{n+m}^b \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Đối với các cơ sở nhiều chiều, toán tử trích xuất Bézier được định nghĩa bằng tích tenxơ của các cơ sở một chiều.

CHƯƠNG 3: CƠ SỞ LÝ THUYẾT

3.1. The generalized unconstrained higher-order shear deformation theory (UHSDT)

Có thể thấy rằng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba (TSDT) chứa một biến bậc ba của chuyển vị trong mặt phẳng bị ràng buộc bởi chuyển vị ngang và góc xoay. Hơn nữa, TSDT giả định rằng ứng suất cắt ngang triệt tiêu ở mặt trên và mặt dưới của tấm, điều này không hoàn toàn chính xác. Trong khi xem xét giải quyết bài toán có lực tác dụng song song với bề mặt của các tấm, Leung đã đề xuất một lý thuyết biến dạng cắt không ràng buộc bậc ba (UTSDT). Ngoài ra, UTSDT cũng khả thi đối với các bài toán liên quan đến ma sát tiếp xúc hoặc trường dòng chảy song song bề mặt tấm. Khác với lý thuyết TSDT của Reddy, lý thuyết này cho phép thành phần biến dạng cắt có giá trị hữu hạn ở mặt dưới và mặt trên của tấm. Mặc dù các phương trình mô tả của UTSDT có độ phức tạp tương tự như của TSDT, lời giải của UTSDT chính xác hơn so với các lời giải của TSDT khi so sánh với nghiệm chính xác 3D. Lý thuyết biến dạng cắt không ràng buộc bậc ba bao gồm bảy thành phần chuyển vị, tức là sáu chuyển vị trong mặt phẳng và một chuyển vị cắt.

Luận án này đóng góp một lý thuyết không bị ràng buộc mới theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao được gọi là lý thuyết biến dạng cắt không ràng buộc bậc cao tổng quát (UHSDT) được sử dụng để tính toán trong chương 4. Mặc dù

UHSĐT cũng có bảy thành phần chuyển vị tương tự như của UTSDT, nhưng thành phần góc xoay bậc cao phụ thuộc vào hàm tùy ý $f(z)$ thông qua độ dày tấm. Trong UTSDT, hàm bậc ba ($f(z) = z^3$) được sử dụng. Tác giả thấy rằng ứng suất cắt thông qua độ dày tấm phụ thuộc vào các đặc tính khác nhau như số lượng lớp, độ dày lớp và tính chất vật liệu. Do đó, có thể khái quát hóa một lý thuyết biến dạng cắt bậc cao không ràng buộc tổng quát được viết dưới dạng các hàm $f(z)$ sao cho nó phản ánh ứng xử phi tuyến tốt thông qua chiều dày tấm và có thể cung cấp các lời giải tốt hơn UTSDT. Điều này thúc đẩy tác giả nghiên cứu UHSĐT.

Trường chuyển vị của UHSĐT được viết dưới dạng các hàm $f(z)$ như sau:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + zu_1(x, y, t) + f(z)u_2(x, y, t) \quad (3.1)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + zv_1(x, y, t) + f(z)v_2(x, y, t)$$

$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t)$$

trong đó $u_0(x, y, t)$, $v_0(x, y, t)$, $u_1(x, y, t)$, $v_1(x, y, t)$, $u_2(x, y, t)$, $v_2(x, y, t)$ và $w(x, y, t)$ là bảy biến cần xác định. Theo đó, hai hàm phân bố mới được đề xuất và hàm của UTSDT được giới thiệu như được chỉ ra ở bảng 3.1

Bảng 3.1: Ba dạng hàm phân bố và đạo hàm của chúng

Mô hình	$f(z)$	$f'(z)$
Leung	z^3	$3z^2$
Mô hình 1	$\arctan(z)$	$\frac{1}{1+z^2}$
Mô hình 2	$\sin(z)$	$\cos(z)$

3.2. Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao dạng liên tục C^0 (C^0 -type HSDT)

Các lý thuyết biến dạng cắt đã đề cập ở trong luận án yêu cầu liên tục C^0 hoặc C^1 của trường chuyển vị tổng quát. Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT) và lý thuyết biến dạng cắt cổ điển (CPT) có thành phần đạo hàm trong công thức chuyển vị. Trong một số phương pháp số, thường khó thực thi các điều kiện biên cho các thành phần đạo hàm đó. Do đó, HSDT loại liên tục C^0 được đề xuất khá nhiều.

Trong luận án này, tác giả đã sử dụng C^0 -type HSDT cho phân tích các tấm có lỗ rỗng thay đổi chức năng dán lớp áp điện được gia cường bằng các tấm graphene (PFGP-GPLs) và tấm vật liệu áp điện thay đổi chức năng trong chương 5 và 6. HSDT loại liên tục C^0 này góp phần làm tăng tính mới của luận án.

Theo HSDT tổng quát, trường chuyển vị của điểm bất kỳ điểm trên tấm có năm ẩn số và có thể được viết lại bởi:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}^1(x, y, t) + z\mathbf{u}^2(x, y, t) + f(z)\mathbf{u}^3(x, y, t) \quad (3.2)$$

trong đó

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{u}^1 = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{u}^2 = -\begin{Bmatrix} w_{0,x} \\ w_{0,y} \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{u}^3 = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

với u_0, v_0, w_0, θ_x và θ_y là chuyển vị trong mặt phẳng, chuyển vị cắt và các góc xoay trong mặt phẳng y - z , x - z tương; các ký hiệu ‘ x ’ và ‘ y ’ là đạo hàm của hàm bất kỳ theo biến x và y tương ứng.

Để tránh đạo hàm bậc cao trong các công thức gần đúng và dễ dàng áp dụng các điều kiện biên tương tự như quy trình phân tử hữu hạn tiêu chuẩn, các giả định thêm vào được thực hiện như sau:

$$w_{0,x} = \beta_x; \quad w_{0,y} = \beta_y \quad (3.4)$$

Thay thế phương trình (3.4) vào phương trình (3.3), chúng ta được:

$$\mathbf{u}^1 = \{u_0 \quad v_0 \quad w_0\}^T; \quad \mathbf{u}^2 = -\{\beta_x \quad \beta_y \quad 0\}^T; \quad \mathbf{u}^3 = \{\theta_x \quad \theta_y \quad 0\}^T \quad (3.5)$$

Từ phương trình (3.5), có thể thấy rằng trường tương thích biến dạng yêu cầu liên tục C^0 . Lý thuyết này có tên gọi là lý thuyết biến dạng cắt bậc cao dạng liên tục C^0 (C^0 -type HSDT).

Dựa trên C^0 -type HSDT, biến dạng uốn và cắt được biểu diễn như sau:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^T = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + z\boldsymbol{\varepsilon}^1 + f(z)\boldsymbol{\varepsilon}^2; \quad (3.6)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^T = \boldsymbol{\varepsilon}^{s0} + f'(z)\boldsymbol{\varepsilon}^{s1}$$

trong đó

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^1 = -\begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^2 = \begin{Bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{s0} = \begin{Bmatrix} w_{0,x} - \beta_x \\ w_{0,y} - \beta_y \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{s1} = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}$$

với $f'(z)$ là đạo hàm của hàm $f(z)$ cái mà sẽ được chọn sau.

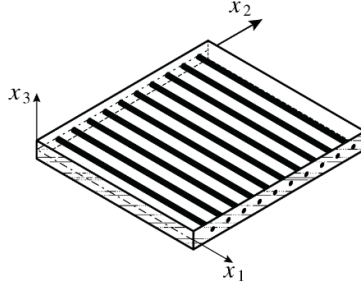
3.3. Phương trình chủ yếu của tấm composite nhiều lớp

Định luật Hooke tổng quát cho một vật liệu dị hướng được thể hiện bởi:

$$\sigma_i = Q_{ij}\varepsilon_j \quad (3.8)$$

trong đó σ_i là các thành phần ứng suất, ε_j là các thành phần biến dạng và Q_{ij} là các hệ số vật liệu “Giảm bớt” cho các bài toán 2D với i, j liên quan đến các thành phần của hệ tọa độ Descarte (x_1, x_2, x_3). Tổng quát, Q_{ij} có 21 hệ số đàn hồi độc lập. Đối với vật liệu trục hướng, số lượng thông số vật liệu giảm xuống

còn 9 cho các bài toán ba chiều. Hình 3.1 minh họa hệ tọa độ vật liệu (x_1, x_2, x_3) , trong đó trục tọa độ vật liệu x_1 được lấy song song hoặc trùng với hướng sợi gia cường, trục x_2 vuông góc với hướng sợi trong mặt phẳng của lớp và trục x_3 vuông góc với mặt phẳng của lớp.



Hình 3. 1. Minh họa lớp lamina của tấm composite nhiều lớp.

Sử dụng quy luật pha trộn, một lớp lamina hằng số được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_f \nu_f + E_m \nu_m & ; \quad \nu_{12} &= \nu_f \nu_f + \nu_m \nu_m \\ E_2 &= \frac{E_f E_m}{E_f \nu_m + E_m \nu_f} & ; \quad G_{12} &= \frac{G_f G_m}{G_f \nu_m + G_m \nu_f} \end{aligned} \quad (3.9)$$

trong đó $E_f, E_m; \nu_f, \nu_m; \nu_f, \nu_m$ và G_f, G_m là mô đun đàn hồi Young, hệ số Poisson, khối lượng và mô đun đàn hồi cắt tương ứng, trong đó f và m liên quan đến sợi gia cường và nền. Ngoài ra, G_f, G_m được tính toán bởi:

$$G_f = \frac{E_f}{2(1+\nu_f)} \quad ; \quad G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \quad (3.10)$$

Bỏ qua σ_z cho mỗi lớp trục hướng, phương trình chủ yếu của lớp thứ k^{th} trong hệ tọa độ địa phương suy ra từ định luật Hooke cho bài toán ứng suất phẳng được cho bởi:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^k \\ \sigma_2^k \\ \tau_{12}^k \\ \tau_{13}^k \\ \tau_{23}^k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & Q_{54} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45} & Q_{44} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^k \\ \varepsilon_2^k \\ \gamma_{12}^k \\ \gamma_{13}^k \\ \gamma_{23}^k \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

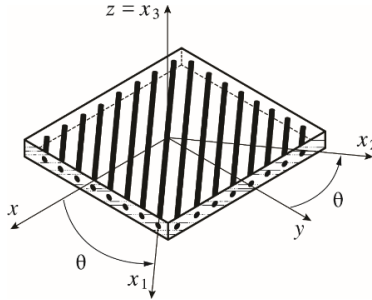
trong đó thành phần giảm cứng, Q_{ij}^k , được diễn tả như sau:

$$\begin{aligned}
Q_{11}^k &= \frac{E_1^k}{1-\nu_{12}^k\nu_{21}^k}; & Q_{12}^k &= \frac{\nu_{12}^k E_2^k}{1-\nu_{12}^k\nu_{21}^k}; & Q_{22}^k &= \frac{E_2^k}{1-\nu_{12}^k\nu_{21}^k}; & Q_{66}^k &= G_{12}^k; \\
Q_{55}^k &= G_{13}^k; & Q_{44}^k &= G_{23}^k
\end{aligned}
\tag{3.12}$$

Mối quan hệ ứng suất biến dạng trong hệ trục độ toàn cục (x, y, z) được tính bằng

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^k \\ \sigma_{yy}^k \\ \tau_{xy}^k \\ \tau_{xz}^k \\ \tau_{yz}^k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} & \bar{Q}_{54} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{44} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^k \\ \epsilon_{yy}^k \\ \gamma_{xy}^k \\ \gamma_{xz}^k \\ \gamma_{yz}^k \end{Bmatrix}
\tag{3.13}$$

trong đó \bar{Q}_{ij}^k là ma trận hệ số vật liệu hằng chuyển đổi và được viết chi tiết như sau:



Hình 3. 2. Hệ tọa độ vật liệu và hệ toàn cục của tấm composite.

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
\bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta
\end{aligned}
\tag{3.14}$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)$$

$$\bar{Q}_{44} = Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta$$

$$\bar{Q}_{45} = (Q_{55} - Q_{44}) \sin \theta \cos \theta$$

$$\bar{Q}_{55} = Q_{55} \cos^2 \theta + Q_{44} \sin^2 \theta$$

Hệ tọa độ địa phương (vật liệu) và hệ toàn cục của tấm composite được chỉ ra trong hình 3.2.

3.4. Vật liệu áp điện

Phương trình chủ yếu của vật liệu áp điện tuyến tính có thể được biểu diễn như sau

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & -\mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & \mathbf{g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

trong đó $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ và $\boldsymbol{\sigma}$ là vecto biến dạng và ứng suất tương ứng; \mathbf{c} là ma trận hệ số đàn hồi. Vecto trường điện \mathbf{E} , có thể được định nghĩa

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\phi = -\nabla\phi \quad (3.16)$$

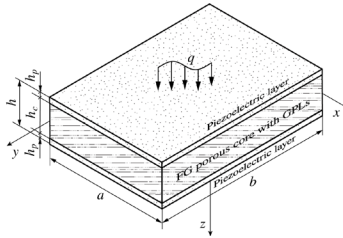
Lưu ý rằng, đối với loại vật liệu áp điện được xem xét trong công trình này, ma trận hằng số ứng suất áp điện \mathbf{e} , ma trận hằng biến dạng áp điện \mathbf{d} và ma trận hằng số điện môi \mathbf{g} có thể được viết như sau:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (3.17)$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \end{bmatrix}$$

3.5 Tấm có lỗ rỗng thay đổi chức năng dán lớp áp điện được gia cường bằng các tấm graphene (PFGP-GPLs)

Trong luận án này, một mô hình tấm giống như dạng tấm sandwich với chiều dài a , chiều rộng b và tổng chiều dày $h = h_c + 2h_p$ trong đó h_c và h_p là chiều dày của lớp lõi có lỗ rỗng và chiều dày của lớp dán trên bề mặt (lớp áp điện) như được chỉ ra ở hình 3.3.



Hình 3.3. Minh họa tấm áp điện có lỗ rỗng thay đổi chức năng gia cường bởi GPLs.

Ba loại phân bố lỗ rỗng khác nhau dọc theo chiều dày của các tấm bao gồm hai loại không đồng nhất và loại đồng nhất được minh họa trong Hình 3.4. Ngoài ra, ba mẫu phân tán GPL được hiển thị trong Hình 3.5 được nghiên cứu cho mỗi loại phân bố lỗ rỗng. Trong mỗi mẫu, tỉ lệ thể tích V_{GPL} được giả sử thay đổi tuyến tính theo hướng độ dày. Như có thể thấy trong Hình 3.5, E'_1 và E'_2 là các

mô đun đàn hồi Young tối đa và tối thiểu của vật liệu xốp không đồng nhất mà không có GPL, tương ứng, trong khi E' là mô đun đàn hồi Young của loại phân phối lỗ rỗng đồng nhất.

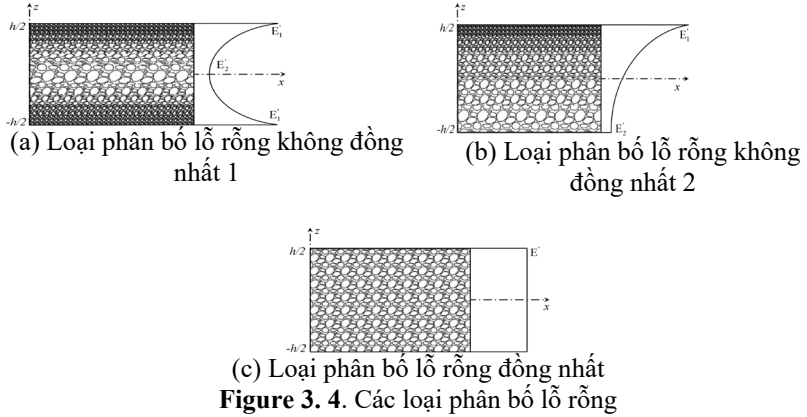


Figure 3. 4. Các loại phân bố lỗ rỗng

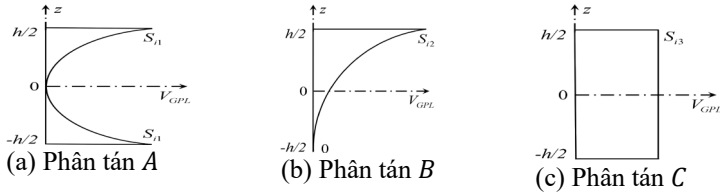


Figure 3. 5. Ba loại phân tán A, B và C của GPL cho mỗi loại phân bố lỗ rỗng.

Đặc tính vật liệu bao gồm mô đun đàn hồi Young $E(z)$, mô đun đàn hồi cắt $G(z)$ và khối lượng riêng $\rho(z)$ thay đổi theo phương z cho mỗi loại phân bố lỗ rỗng được định nghĩa như sau:

$$\begin{cases} E(z) = E_1 [1 - e_0 \lambda(z)], \\ G(z) = E(z) / [2(1 + \nu(z))], \\ \rho(z) = \rho_1 [1 - e_m \lambda(z)], \end{cases} \quad (3.18)$$

trong đó

$$\lambda(z) = \begin{cases} \cos(\pi z / h_c), & \text{Non - uniform porosity distribution 1} \\ \cos(\pi z / 2h_c + \pi / 4), & \text{Non - uniform porosity distribution 2} \\ \lambda, & \text{Uniform porosity distribution} \end{cases} \quad (3.19)$$

Với $E_1 = E'_1$ và $E_1 = E'$ cho loại phân bố lỗ rỗng không đồng nhất và đồng nhất tương ứng. ρ_1 là giá trị lớn nhất của khối lượng riêng phân lõi tằm. Hệ số lỗ rỗng e_0 có thể được xác định bởi:

$$e_0 = 1 - E_2' / E_1' \quad (3.20)$$

Thông qua giải thuật Gaussian Random Field (GRF), đặc tính cơ học của “closed-cell cellular solids” (tạm dịch chất rắn tế bào kín) được đưa ra là

$$\frac{E(z)}{E_1} = \left(\frac{\rho(z) / \rho_1 + 0.121}{1.121} \right)^{2.3} \quad \text{for} \left(0.15 < \frac{\rho(z)}{\rho_1} < 1 \right) \quad (3.21)$$

Hệ số khối lượng e_m trong phương trình (3.24) có thể phát biểu như sau:

$$e_m = \frac{1.121 \left(1 - 2.3 \sqrt[2.3]{1 - e_0 \lambda(z)} \right)}{\lambda(z)} \quad (3.22)$$

Cũng theo closed-cell GRF [128], hệ số Poisson $\nu(z)$ được suy ra

$$\nu(z) = 0.221 p' + \nu_1 (0.342 p'^2 - 1.21 p' + 1), \quad (3.23)$$

trong đó ν_1 là hệ số Poisson của nền kim loại không có gia cường và p' được cho như sau:

$$p' = 1.121 \left(1 - 2.3 \sqrt[2.3]{1 - e_0 \lambda(z)} \right) \quad (3.24)$$

Cần lưu ý rằng để có được sự so sánh có ý nghĩa và công bằng, khối lượng trên một đơn vị bề mặt M của các tấm xếp FG với các phân bố lỗ rỗng khác nhau được đặt tương đương và có thể được tính bằng

$$M = \int_{-h_c/2}^{h_c/2} \rho(z) dz \quad (3.25)$$

Tiếp theo, hệ số λ trong phương trình (3.18) cho dạng phân bố đồng nhất được cho như sau

$$\lambda = \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0} \left(\frac{M / \rho_1 h + 0.121}{0.121} \right)^{2.3} \quad (3.26)$$

Thể tích của GPLs thay đổi dọc theo độ dày của tấm cho ba mẫu phân tán được mô tả trong Hình 3.5 có thể được đưa ra như sau

$$V_{GPL} = \begin{cases} S_{i1} [1 - \cos(\pi z / h_c)], & \text{Pattern A} \\ S_{i2} [1 - \cos(\pi z / 2h_c + \pi / 4)], & \text{Pattern B} \\ S_{i3}, & \text{Pattern C} \end{cases} \quad (3.27)$$

trong đó S_{i1} , S_{i2} và S_{i3} là các giá trị tối đa của phần thể tích GPL và $i = 1, 2, 3$ tương ứng với hai dạng phân phối độ xốp lỗ rỗng không đồng nhất 1, 2 và dạng phân bố đều, tương ứng. Mối quan hệ giữa thể tích lỗ rỗng V_{GPL} và phần trọng lượng Λ_{GPL} của GPL được cho bởi

$$\frac{\Lambda_{GPL} \rho_m}{\Lambda_{GPL} \rho_m + \rho_{GPL} - \Lambda_{GPL} \rho_{GPL}} \int_{-h_c/2}^{h_c/2} [1 - e_m \lambda(z)] dz = \int_{-h_c/2}^{h_c/2} V_{GPL} [1 - e_m \lambda(z)] dz. \quad (3.28)$$

Bằng mô hình cơ học vi mô Halpin-Tsai [129-131], mô đun E_1 được xác định

$$E_1 = \frac{3}{8} \left(\frac{1 + \zeta_L \eta_L V_{GPL}}{1 - \eta_L V_{GPL}} \right) E_m + \frac{5}{8} \left(\frac{1 + \zeta_w \eta_w V_{GPL}}{1 - \eta_w V_{GPL}} \right) E_m, \quad (3.29)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \zeta_L &= \frac{2l_{GPL}}{t_{GPL}}, \quad \zeta_w = \frac{2w_{GPL}}{t_{GPL}}, \quad \eta_L = \frac{(E_{GPL}/E_m) - 1}{(E_{GPL}/E_m) + \zeta_L}, \\ \eta_w &= \frac{(E_{GPL}/E_m) - 1}{(E_{GPL}/E_m) + \zeta_w}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

với w_{GPL} , l_{GPL} và t_{GPL} lần lượt biểu thị chiều rộng, chiều dài và độ dày trung bình của GPL; E_{GPL} và E_m lần lượt là các mô đun GPL và ma trận kim loại. Sau đó, chúng ta có thể xác định khối lượng riêng ρ_1 và hệ số Poisson ν_1 của GPL được gia cố cho ma trận kim loại xốp theo quy tắc pha trộn như

$$\rho_1 = \rho_{GPL} V_{GPL} + \rho_m V_m, \quad (3.31)$$

$$\nu_1 = \nu_{GPL} V_{GPL} + \nu_m V_m \quad (3.32)$$

trong đó ρ_{GPL} , ν_{GPL} và V_{GPL} là khối lượng riêng, hệ số Poisson và thể tích của GPLs, tương ứng; trong khi đó ρ_m , ν_m và $V_m = 1 - V_{GPL}$ đại diện cho khối lượng riêng, hệ số Poisson và thể tích của vật liệu nền tương ứng.

3.6 Tấm vật liệu áp điện chức năng có lỗ rỗng (FGPMP)

Xét một tấm FGPMP có chiều dài a , chiều rộng b và độ dày h . Tấm được làm bằng vật liệu hỗn hợp PZT-4 và PZT-5H chịu điện thế $\Phi(x, y, z, t)$ như trong Hình 3.5, trong đó các bề mặt hoàn toàn PZT-4 và PZT-5H được phân bố ở các lớp trên cùng ($z = h/2$) và dưới cùng ($z = -h/2$), tương ứng. Hai loại tấm xốp áp điện chức năng bao gồm FGPM-I và FGPM-II được xem xét trong nghiên cứu này. Đối với một kiểu phân bố đều, FGPM-I, các tính chất vật liệu hiệu quả của các tấm xốp áp điện thông qua hướng độ dày được tính toán bằng mô hình định luật điện biến đổi (a modified power-law model) [82-83]:

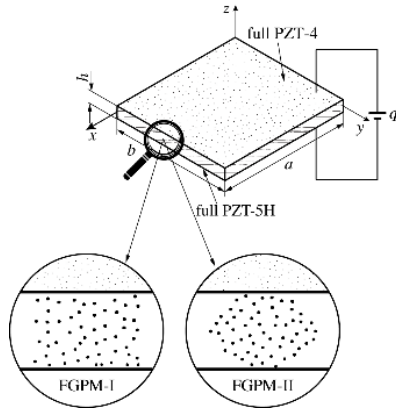
$$\begin{aligned} c_{ij}(z) &= (c_{ij}^u - c_{ij}^l) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^g + c_{ij}^l - \frac{\alpha}{2} (c_{ij}^u + c_{ij}^l); \\ (i, j) &= \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,3), (5,5), (6,6)\} \\ e_{ij}(z) &= (e_{ij}^u - e_{ij}^l) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^g + e_{ij}^l - \frac{\alpha}{2} (e_{ij}^u + e_{ij}^l); \quad (i, j) = \{(3,1), (3,3), (3,5)\} \\ k_{ij}(z) &= (k_{ij}^u - k_{ij}^l) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^g + k_{ij}^l - \frac{\alpha}{2} (k_{ij}^u + k_{ij}^l); \quad (i, j) = \{(1,1), (3,3)\} \\ \rho(z) &= (\rho^u - \rho^l) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^g + \rho^l - \frac{\alpha}{2} (\rho^u + \rho^l) \end{aligned} \quad (3.33)$$

trong đó c_{ij} , e_{ij} và k_{ij} được định nghĩa như trên, g là chỉ số power đại diện cho sự phân bố vật liệu trên bề dày tấm, ρ là khối lượng riêng; các ký hiệu u và l lần lượt biểu thị các đặc tính vật liệu của bề mặt trên và dưới và α là thể tích lỗ rỗng.

Loại phân bố không đồng đều (uneven), FGPM-II, lỗ rỗng tập trung nhiều ở bề mặt giữa của mặt cắt ngang và số lượng lỗ rỗng sẽ ít dần đi về 2 phía ở mặt trên và mặt dưới của mặt cắt ngang. Trong trường hợp này, các đặc tính vật liệu được tính bằng:

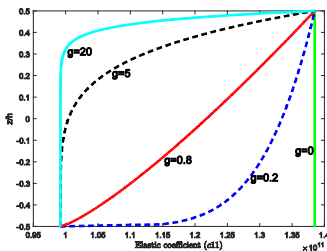
$$\begin{aligned}
 c_{ij}(z) &= (c_{ij}^u - c_{ij}^l) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^g + c_{ij}^l - \frac{\alpha}{2} (c_{ij}^u + c_{ij}^l) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right); \\
 (i, j) &= \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,3), (5,5), (6,6)\} \\
 e_{ij}(z) &= (e_{ij}^u - e_{ij}^l) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^g + e_{ij}^l - \frac{\alpha}{2} (e_{ij}^u + e_{ij}^l) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right); \\
 (i, j) &= \{(3,1), (3,3), (3,5)\} \\
 k_{ij}(z) &= (k_{ij}^u - k_{ij}^l) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^g + k_{ij}^l - \frac{\alpha}{2} (k_{ij}^u + k_{ij}^l) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right); \\
 (i, j) &= \{(1,1), (3,3)\} \\
 \rho(z) &= (\rho^u - \rho^l) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^g + \rho^l - \frac{\alpha}{2} (\rho^u + \rho^l) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right)
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Để chỉ ra ảnh hưởng của phân thể tích lỗ rỗng đến tính chất vật liệu, tác giả minh họa sự biến thiên của hệ số đàn hồi c_{11} của tấm FGPM xấp được làm bằng PZT-4 / PZT-5H so với theo độ dày với các giá trị chỉ số power khác nhau như được mô tả trong Hình 3. 5. Có thể thấy rằng hệ số đàn hồi của tấm FGPM hoàn hảo $\alpha = 0$ thì liên tục xuyên qua bề mặt trên cùng (giàu PZT-4) xuống phía dưới

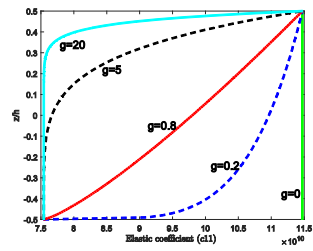


Hình 3.5. Hình học và mặt cắt ngang của tấm FGPMP.

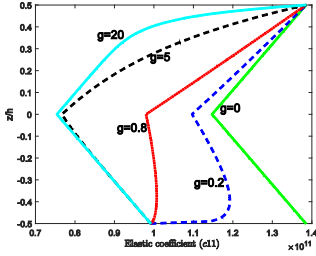
bề mặt (giàu PZT-5H) như chỉ ra ở hình 3.6a. Khi $g = 0$, hệ số đàn hồi thì không đổi thông qua độ dày tấm. Các đồ thị biểu diễn của c_{11} cũng được vẽ trong Hình 3.6b và Hình 3.6c tương ứng cho tấm FGPM-I và FGPM-II rỗng. Như đã thấy, đồ thị biểu diễn giống nhau cho loại tấm hoàn hảo FGPM và FGPM-I với lỗ rỗng. Tuy nhiên, độ lớn của hệ số đàn hồi của FGPM-I xấp xỉ thấp hơn so với tấm FGPM hoàn hảo. Do đó, độ cứng của FGPM bị giảm khi tấm có xuất hiện lỗ rỗng. Hơn nữa, đối với loại FGPM-II, giá trị hệ số đàn hồi lớn nhất ở mặt dưới và mặt trên và giảm dần về phía hướng khu vực giữa như được chỉ ra trong hình 3.6c. Hình 3.6d hiển thị ảnh hưởng của lỗ rỗng đến hệ số đàn hồi. Người ta thấy rằng độ lớn của hệ số đàn hồi của tấm FGPM-II bằng với FGPM hoàn hảo ở mặt dưới và mặt trên, và bằng với tấm FGPM-I ở bề mặt giữa tấm.



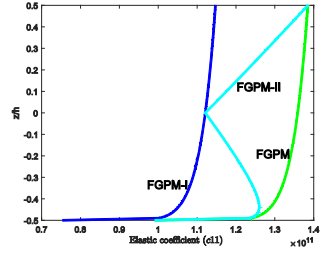
a) Perfect FGPM



b) Porous FGPM-I



c) Porous FGPM-II



d) FGPM, $g=0.1$

Hình 3.6. Khảo sát hệ số đàn hồi c_{11} của tấm FGPM được làm từ PZT-4/PZT-5H với $\alpha = 0.2$.

CHƯƠNG 4: PHÂN TÍCH VÀ ĐIỀU KHIỂN TẤM COMPOSITE NHIỀU LỚP CÓ DÁN LỚP ÁP ĐIỆN

4.1 Giới thiệu

Trong chương này, mục tiêu đầu tiên của luận án được đề cập. Một công thức phần tử hữu hạn đẳng hình học dựa trên trích xuất Bézier cho hàm cơ sở NURBS kết hợp với lý thuyết biến dạng cắt bậc cao không bị ràng buộc tổng quát (UHSDT) để phân tích phản ứng tĩnh, dao động tự do và phân tích đáp ứng động học tức thời của các tấm composite nhiều lớp. Phương pháp đề xuất cho phép một giá trị hữu hạn của ứng suất cắt ở bề mặt trên và dưới của các tấm và không sử dụng hệ số hiệu chỉnh cắt. Các ứng xử được đưa vào điều khiển thông qua vật liệu áp điện.

4.2. Dạng yếu cho tấm composite nhiều lớp

Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao không bị ràng buộc tổng quát (UHSDT) có thể được viết như sau:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + zu_1(x, y, t) + f(z)u_2(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + zv_1(x, y, t) + f(z)v_2(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ở đây mô hình 1 với $f(z) = \arctan(z)$ được sử dụng. Vì thế, lý thuyết biến dạng cắt bậc cao không bị ràng buộc tổng quát (UHSDT) có thể được gọi là lý thuyết biến dạng cắt không bị ràng buộc lượng giác ngược (UITSDT).

Do đó, vector biến dạng trong mặt phẳng $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ được biểu thị bằng phương trình sau

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}]^T = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + z\boldsymbol{\varepsilon}_1 + f(z)\boldsymbol{\varepsilon}_2 \quad (4.2)$$

và vectơ biến dạng cắt $\boldsymbol{\gamma}$ có dạng

$$\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}]^T = \boldsymbol{\varepsilon}_0^s + f'(z)\boldsymbol{\varepsilon}_1^s \quad (4.3)$$

trong đó $f'(z)$ là đạo hàm của hàm $f(z)$ và

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ v_{0,x} + u_{0,y} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} u_{1,x} \\ v_{1,y} \\ v_{1,x} + u_{1,y} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} u_{2,x} \\ v_{2,y} \\ v_{2,x} + u_{2,y} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_0^s = \begin{bmatrix} u_1 + w_{,x} \\ v_1 + w_{,y} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1^s = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Một dạng yếu của mô hình tĩnh cho các tấm dưới tải ngang q_0 có thể được viết là

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^T \bar{\mathbf{D}} \boldsymbol{\varepsilon}_p d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\gamma}^T \bar{\mathbf{D}}_s \boldsymbol{\gamma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta w q_0 d\Omega \quad (4.5)$$

trong đó q_0 là tải tác dụng vuông góc với tấm trên 1 đơn vị diện tích.

Từ định luật Hooke và biến dạng tuyến tính được đưa ra bởi các phương trình (4.2) và (4.3), ứng suất được tính bằng

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_p \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{D}}_s \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_p \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{c} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.6)$$

trong đó $\boldsymbol{\sigma}_p$ and $\boldsymbol{\tau}$ là thành phần ứng suất trong mặt phẳng và ứng suất cắt; $\bar{\mathbf{D}}$ và $\bar{\mathbf{D}}_s$ là các ma trận hằng số vật liệu được đưa ra dưới dạng

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{D}}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{B}_s \\ \mathbf{B}_s & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

trong đó

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \bar{Q}_{ij} dz; \quad (4.8)$$

$$i, j = 1, 2, 6$$

$$(A_s^j, B_s^j, D_s^j) = \int_{-h/2}^{h/2} [1, f'(z), (f'(z))^2] \bar{Q}_{ij} dz; \quad i, j = 4, 5$$

trong đó \bar{Q}_{ij} là ma trận hằng số vật liệu biến đổi.

Đối với phân tích dao động cưỡng bức của các tấm, một dạng yếu có thể được suy ra từ phương trình cân bằng động không giảm chấn sau đây:

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^T \bar{\mathbf{D}} \boldsymbol{\varepsilon}_p d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\gamma}^T \bar{\mathbf{D}}_s \boldsymbol{\gamma} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \ddot{\mathbf{u}}^T \mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} d\Omega = \int_{\Omega} \delta w q(x, y, t) d\Omega \quad (4.9)$$

trong đó ma trận khối lượng \mathbf{m} được tính theo dạng đồng nhất như sau:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & I_4 \\ I_2 & I_3 & I_5 \\ I_4 & I_5 & I_6 \end{bmatrix}, (I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho (1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) dz \quad (4.10)$$

trong đó ρ là khối lượng riêng,

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{Bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w \end{Bmatrix}; \mathbf{u}_2 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \mathbf{u}_3 = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

Cần lưu ý rằng không có lực bên ngoài nào được yêu cầu trong các bài toán dao động tự do và các thành phần ở phía bên phải của phương trình (4.9) do đó tương đương với không.

4.3. Công thức xấp xỉ dựa trên trích xuất Bézier cho hàm NURBS

Bằng cách sử dụng trích xuất Bézier cho NURBS, trường chuyển vị \mathbf{u} của tấm được tính gần đúng như sau

$$\mathbf{u}^h(\xi, \eta) = \sum_A^{m \times n} R_A^e(\xi, \eta) \mathbf{q}_A \quad (4.12)$$

trong đó $n \times m$ là số hàm cơ sở, và $\mathbf{x}^T = (x \ y)$ là vectơ tọa độ vật lý.

Trong phương trình (4.12), $R_A^e(\xi, \eta)$ là hàm cơ sở NURBS cho các bài toán hai chiều được viết dưới dạng kết hợp tuyến tính của toán tử trích xuất Bézier và đa thức Bernstein, \mathbf{P}_A là điểm điều khiển A và $\mathbf{q}_A = [u_{0,A} \ v_{0,A} \ u_{1,A} \ v_{1,A} \ u_{2,A} \ v_{2,A} \ w_A]^T$ là vectơ của bậc tự do nút liên quan đến điểm điều khiển A .

Bằng cách thay thế phương trình (4.12) với phương trình (4.2), biến dạng trong mặt phẳng và biến dạng cắt có thể được viết lại thành

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_p \ \boldsymbol{\gamma}]^T = \sum_{A=1}^{m \times n} [\mathbf{B}_A^m \ \mathbf{B}_A^{b1} \ \mathbf{B}_A^{b2} \ \mathbf{B}_A^{s1} \ \mathbf{B}_A^{s2}]^T \mathbf{q}_A \quad (4.13)$$

trong đó

$$\mathbf{B}_A^m = \begin{bmatrix} R_{A,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{A,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_{A,y} & R_{A,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_A^{b1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{A,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{A,y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{A,y} & R_{A,x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{B}_A^{b2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & R_{A,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{A,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{A,y} & R_{A,x} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_A^{s1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_A & 0 & 0 & 0 & R_{A,x} \\ 0 & 0 & 0 & R_A & 0 & 0 & R_{A,y} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_A^{s2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & R_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_A & 0 \end{bmatrix}$$

Bằng cách thay thế phương trình. (4. 13) với phương trình (4. 5), công thức phân tích tĩnh thu được ở dạng sau

$$\mathbf{Kq} = \mathbf{F} \quad (4. 15)$$

trong đó ma trận độ cứng toàn cục \mathbf{K} được đưa ra bởi

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{B}^m \\ \mathbf{B}^{b1} \\ \mathbf{B}^{b2} \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^m \\ \mathbf{B}^{b1} \\ \mathbf{B}^{b2} \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{s1} \\ \mathbf{B}^{s2} \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{B}_s \\ \mathbf{B}_s & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{s1} \\ \mathbf{B}^{s2} \end{bmatrix} \right\} d\Omega \quad (4. 16)$$

và vectơ tải \mathbf{F} được tính như

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} q_0 \mathbf{R}_0 d\Omega \quad (4. 17)$$

trong đó

$$\mathbf{R}_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad R_A] \quad (4. 18)$$

Cho phân tích dao động tự do,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{Kq} = \mathbf{0} \quad (4. 19)$$

trong đó ma khối lượng toàn cục \mathbf{M} được đưa ra bởi

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0 \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & I_4 \\ I_2 & I_3 & I_5 \\ I_4 & I_5 & I_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0 \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \right\} d\Omega \quad (4. 20)$$

với

$$\mathbf{N}_0 = \begin{bmatrix} R_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_A \end{bmatrix}; \quad (4.21)$$

$$\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & R_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Đối với phân tích dao động cưỡng bức, các phương trình rời rạc động không giảm chấn có thể được biểu thị từ phương trình (4.9) như sau:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}(t) \quad (4.22)$$

Để giải quyết bài toán phụ thuộc thời gian này, một số phương pháp đã được đề xuất như Wilson, Newmark, Houbolt, Crank-Nicholson, v.v. Ở đây, phương trình (4.22) được giải quyết bằng phương pháp Newmark.

4.4 Công thức xấp xỉ của trường điện thế

Để xấp xỉ gần đúng trường điện thế, tác giả phân tách từng lớp áp điện mỏng thành nhiều lớp hữu hạn thông qua phương kích thước chiều dày. Ngoài ra, biến thiên điện thế được giả sử là tuyến tính trong mỗi lớp con và được tính gần đúng xấp xỉ thông qua chiều dày lớp áp điện như sau:

$$\phi^i(z) = \mathbf{N}_\phi^i \boldsymbol{\phi}^i \quad (4.23)$$

trong đó \mathbf{N}_ϕ^i là các hàm hình dạng cho điện thế với $p = 1$, và là $\boldsymbol{\phi}^i$ là vectơ chứa điện thế tại bề mặt trên và dưới của lớp con thứ i , $\boldsymbol{\phi}^i = [\phi^{i-1} \quad \phi^i]$ ($i = 1, 2, \dots, n_{sub}$) trong đó n_{sub} là số lớp áp điện.

Đối với mỗi phần tử lớp áp điện, các giá trị của điện thế được giả sử là bằng nhau ở cùng độ cao dọc theo độ dày. Điện trường \mathbf{E} có thể được viết lại thành

$$\mathbf{E} = -\nabla \mathbf{N}_\phi^i \boldsymbol{\phi}^i = -\mathbf{B}_\phi \boldsymbol{\phi}^i \quad (4.24)$$

trong đó

$$\mathbf{B}_\phi = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{h_p} \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

Lưu ý rằng, đối với loại vật liệu áp điện được xem xét trong công trình này, ma trận hằng số áp điện \mathbf{e} và ma trận hằng số điện môi \mathbf{g} của lớp trực hướng thứ k trong hệ tọa độ địa phương được viết như sau:

$$\mathbf{e}^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(k)}; \quad \mathbf{g}^{(k)} = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (4.26)$$

Tuy nhiên, các lớp lamina thường được làm bằng nhiều lớp trực hướng với các hướng sợi khác nhau cho các tính chất điện môi và áp điện. Vì vậy, ma trận

hằng số ứng suất áp điện cho lớp trục hướng thứ k trong hệ tọa độ toàn cục được đưa ra bởi

$$\mathbf{e}^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{15} & 0 & 0 \\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{32} & \bar{e}_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(k)} ; \quad \mathbf{g}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{p}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{p}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{p}_{33} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (4.27)$$

trong đó \bar{e}_{ij} và \bar{p}_{ii} là các hằng số vật liệu biến đổi của lớp lamina thứ k và được tính tương tự như \bar{Q}_{ij} .

4.5 Phương trình chuyển động chủ yếu

Phương trình chuyển động chủ yếu có thể được suy ra dưới dạng sau:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & -\mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{uu} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \mathbf{c} \mathbf{B}_u d\Omega & ; & \quad \mathbf{K}_{u\phi} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{B}_{\phi} d\Omega \\ \mathbf{K}_{\phi\phi} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\phi}^T \mathbf{g} \mathbf{B}_{\phi} d\Omega & ; & \quad \mathbf{M}_{uu} = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{m} \tilde{\mathbf{N}} d\Omega \end{aligned} \quad (4.29)$$

với

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_m^T & z \mathbf{e}_m^T & f(z) \mathbf{e}_m^T & \mathbf{e}_s^T & f'(z) \mathbf{e}_s^T \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}_m &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}; \mathbf{e}_s = \begin{bmatrix} 0 & e_{15} \\ e_{15} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.30)$$

và $\mathbf{B}_u = [\mathbf{B}^m \ \mathbf{B}^{b1} \ \mathbf{B}^{b2} \ \mathbf{B}^{s1} \ \mathbf{B}^{s2}]^T$; \mathbf{m} và $\tilde{\mathbf{N}}$ được định nghĩa tương tự như phương trình (4. 14) và (4. 20).

Do điện trường \mathbf{E} chỉ tồn tại theo hướng z , nên $\mathbf{K}_{u\phi}$ trong biểu thức (4.28) có thể được viết lại thành

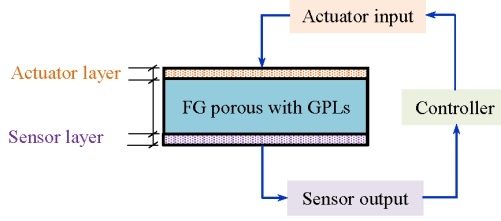
$$\mathbf{K}_{u\phi} = \int_{\Omega} \left((\mathbf{B}^m)^T e_m^T \mathbf{B}_{\phi} + z (\mathbf{B}^{b1})^T e_m^T \mathbf{B}_{\phi} + f(z) (\mathbf{B}^{b2})^T e_m^T \mathbf{B}_{\phi} \right) d\Omega \quad (4.31)$$

Thay thế dòng thứ hai của phương trình (5.6) vào dòng đầu tiên, thu được dạng rút gọn là

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \left(\mathbf{K}_{uu} + \mathbf{K}_{u\phi} \mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{K}_{\phi u} \right) \mathbf{d} = \mathbf{F} + \mathbf{K}_{u\phi} \mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{Q} \quad (4.32)$$

4.6 Phân tích điều khiển chủ động

Xem xét một tấm composite tích hợp tấm áp điện với các lớp n ($n \geq 2$) (Xem Hình 4. 1). Lớp cảm biến ở phía dưới được ký hiệu là các chỉ số s và điện tích $Q = 0$.



Hình 4. 1. Lưu đồ của tấm nhiều lớp tích hợp với cảm biến và truyền động.

Độ lợi hằng G_d và G_v của tín hiệu phản hồi chuyển vị và vận tốc do đó được sử dụng để kết hợp (couple) vector điện áp bộ truyền động đầu vào ϕ_a và vector điện áp cảm biến đầu ra ϕ_s như sau:

$$\phi_a = G_d \phi_s + G_v \dot{\phi}_s \quad (4.33)$$

Nếu không có điện tích Q bên ngoài, điện thế được tạo ra trên lớp cảm biến có thể được lấy từ phương trình thứ hai của phương trình (4.28) như sau:

$$\phi_s = \left[\mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \right]_s \left[\mathbf{K}_{\phi u} \right]_s \mathbf{d}_s \quad (4.34)$$

Phương trình (4.34) ở trên cho thấy rằng, khi một lực bên ngoài làm biến dạng tấm, các điện tích được tạo ra trong lớp cảm biến và sau đó được khuếch đại thông qua điều khiển vòng kín để chuyển thành tín hiệu. Tín hiệu này sau đó được gửi đến bộ truyền động phân tán và tạo ra điện áp đầu vào cho bộ truyền động. Cuối cùng, một lực tổng hợp phát sinh thông qua hiệu ứng áp điện ngược và lực này chủ động điều khiển đáp ứng tĩnh của tấm composite nhiều lớp.

Thay thế các phương trình (4.33) - (4.34) cho phương trình (4.28), ta có được

$$\mathbf{Q}_a = \left[\mathbf{K}_{uu} \right]_a \mathbf{d}_a - G_d \left[\mathbf{K}_{\phi\phi} \right]_a \left[\mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \right]_s \left[\mathbf{K}_{\phi u} \right]_s \mathbf{d}_s - G_v \left[\mathbf{K}_{\phi u} \right]_a \left[\mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \right]_s \left[\mathbf{K}_{\phi u} \right]_s \dot{\mathbf{d}}_s \quad (4.35)$$

Thay thế các phương trình (4.33) và (4.35) cho phương trình (4.32), có được

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}^*\mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (4.36)$$

trong đó

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_{uu} + G_d \left[\mathbf{K}_{u\phi} \right]_s \left[\mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \right]_s \left[\mathbf{K}_{\phi u} \right]_s \quad (4.37)$$

và ma trận giảm chấn, \mathbf{C} , có thể được tính toán

$$\mathbf{C} = G_v \left[\mathbf{K}_{u\phi} \right]_a \left[\mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \right]_s \left[\mathbf{K}_{\phi u} \right]_s \quad (4.38)$$

Nếu không có giảm chấn, phương trình (4.36) có thể được viết lại như sau

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}^*\mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (4.39)$$

Cho phân tích tĩnh, phương trình (4.39) còn lại

$$\mathbf{K}^*\mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (4.40)$$

4.7. Kết quả và thảo luận

4.7.1 Tấm composite nhiều lớp

Một tấm hoàn toàn tựa đơn 4 lớp $[0^0/90^0/90^0/0^0]$ chịu tải dao động hình sin được xem xét $q(x, y) = q_0 \sin(\frac{\pi x}{a}) \sin(\frac{\pi y}{b})$. Tỷ lệ chiều dài / chiều rộng là $a/b = 1$ và tỷ lệ chiều dài trên độ dày là $a/h = 4, 10, 20$ và 100 , tương ứng. Vật liệu có $E_1 = 25E_2, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2, \nu_{12} = 0.25$.

Chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên được cho:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= (100E_2h^3)w(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0) / qa^4; \bar{\sigma}_{xx} = \frac{h^2}{qa^2} \sigma_{xx}(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{h}{2}); \bar{\sigma}_{yy} = \frac{h^2}{qa^2} \sigma_{yy}(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{h}{4}) \\ \bar{\sigma}_{xy} &= \frac{h^2}{qa^2} \sigma_{xy}(0, 0, \frac{h}{2}); \bar{\sigma}_{xz} = \frac{h}{qa} \sigma_{xz}(0, \frac{a}{2}, 0); \bar{\sigma}_{yz} = \frac{h}{qa} \sigma_{yz}(\frac{a}{2}, 0, 0) \end{aligned} \quad (4.41)$$

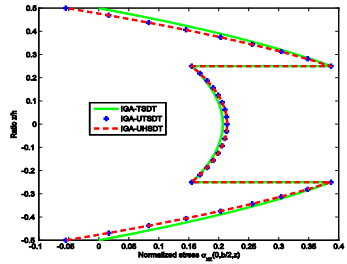
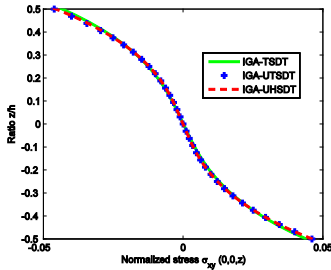
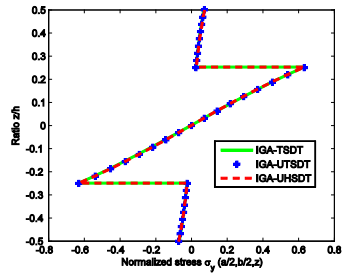
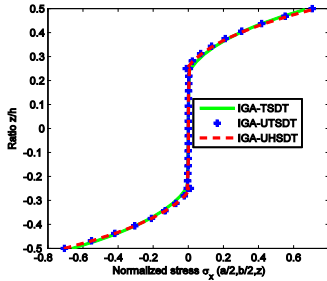
Bảng 4.1 hiển thị các kết quả thu được cùng với các lời giải khác cho chuyển vị và ứng suất chuẩn hóa (không thứ nguyên). Các kết quả thu được dựa trên mô hình đề xuất được so sánh với các kết quả tham chiếu khác dựa trên lý thuyết bậc ba không ràng buộc sử dụng chuỗi Navier (UTSDT) và sử dụng giải pháp số RPIM-UTSDT. Ngoài ra, IGA-UTSDT cũng được so sánh với các lời giải giải tích của Reddy, TSDT và nghiệm chính xác 3D của Pagano. Có thể thấy rằng IGA-UTSDT là đối thủ cạnh tranh mạnh hơn các phương pháp số tham khảo khác cho tất cả các tỷ lệ a/h . So sánh với IGA-UTSDT, IGA-UTSDT cho kết quả tốt hơn một chút, đặc biệt là đối với các tấm dày. Chuyển vị chuẩn hóa và ứng suất của phương pháp đề xuất phù hợp tốt với các lời giải giải tích. Đối với một tấm dày có $a/h = 4$ và 10 , kết quả thu được chính xác hơn các lời giải so sánh khác. Chúng thậm chí còn vượt xa kết quả TSDT của Reddy. Hơn nữa, ứng suất cắt của mô hình đề xuất gần với nghiệm chính xác 3D.

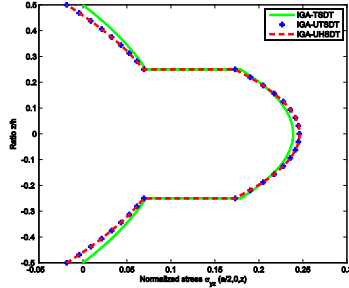
Hình 4.2 vẽ sơ đồ phân bố ứng suất thông qua độ dày của tấm vuông bốn lớp với $a/h = 4$. Có thể thấy rằng kết quả đề xuất phù hợp tốt với các lời giải của IGA-TSDT. Đáng chú ý, ứng suất cắt ngang của UTSDT và UITSDT dựa trên IGA là khác không ở bề mặt trên và dưới của tấm. Tuy nhiên, kết quả sai khác của 2 lời giải (Bảng 4.1 và Hình 4.2) không lớn. Vì thế, các kết quả thu được là chính xác dưới tải trọng uốn, trong khi ma sát tiếp xúc hoặc trường dòng chảy dọc theo lớp biên không nằm trong phạm vi nghiên cứu của luận án này. Những nỗ lực nghiên cứu trong tương lai đang được tiến hành để nghiên cứu áp dụng lý thuyết UITSDT cho bài toán có sự hiện diện của lực kéo song song bề mặt tấm.

Bảng 4.1: Chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên của tấm vuông 4 lớp $[0^0/90^0/90^0/0^0]$ chịu tải phân bố hình sin.

a/h	Phương pháp	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{\sigma}_{yz}$
4	TSDT	1.8937	0.6651	0.6322	0.044	0.2064	0.2389
	RPIM-UTSDT	1.9024	0.7044	0.6297	0.0478	0.2169	0.2494
	UTSDT	1.9023	0.7057	0.6309	0.0461	0.2064	0.2389

	IGA-UTSDT	1.9023	0.7040	0.6294	0.0461	0.2138	0.2460
	IGA- UITSDT	1.9031	0.7041	0.6296	0.0460	0.2142	0.2462
	Elasticity	1.9540	0.7200	0.6630	0.0467	0.2190	0.2910
10	TSDT	0.7147	0.5456	0.3888	0.0268	0.2640	0.1531
	RPIM-UTSDT	0.7204	0.5599	0.3903	0.0280	0.2887	0.1580
	UTSDT	0.7204	0.5609	0.3911	0.0273	0.2843	0.1593
	IGA-UTSDT	0.7204	0.5596	0.3901	0.0273	0.2842	0.1593
	IGA- UITSDT	0.7204	0.5596	0.3902	0.0274	0.2832	0.1612
	Elasticity	0.7430	0.5590	0.4010	0.0275	0.3010	0.1960
20	TSDT	0.5060	0.5393	0.3043	0.0228	0.2825	0.1234
	RPIM-UTSDT	0.5077	0.5425	0.3046	0.0233	0.3120	0.1167
	UTSDT	0.5078	0.5436	0.3052	0.0230	0.3066	0.1279
	IGA-UTSDT	0.5078	0.5424	0.3045	0.0229	0.3066	0.1278
	IGA- UITSDT	0.5078	0.5424	0.3045	0.0229	0.3079	0.1278
	Elasticity	0.5170	0.5430	0.3090	0.0230	0.3280	0.1560
100	TSDT	0.4343	0.5387	0.2708	0.0213	0.2897	0.1117
	RPIM-UTSDT	0.4321	0.5351	0.2700	0.0220	0.2986	0.0704
	UTSDT	0.4344	0.5389	0.2709	0.0214	0.3154	0.1153
	IGA-UTSDT	0.4344	0.5376	0.2702	0.0213	0.3153	0.1152
	IGA- UITSDT	0.4344	0.5389	0.2709	0.0213	0.3153	0.1152
	Elasticity	0.4347	0.5390	0.2710	0.0214	0.3390	0.1410





Hình 4. 2. So sánh sự phân bố ứng suất thông qua bề dày tấm vuông composite 4 lớp ($a/h = 4$).

4.7.2 Tấm composite áp điện

Xem xét một tấm nhiều lớp tựa đơn SSSS ($20\text{ cm} \times 20\text{ cm}$) chịu tải phân bố đều $q = 100\text{ N/m}^2$. Tấm này được dán bởi lớp gốm áp điện trên cả bề mặt dưới và trên đối xứng. Nó bao gồm bốn lớp composite tổng hợp và hai lớp piezo bên ngoài được ký hiệu pie . Cấu trúc của một lớp laminate của tấm composite là $[pie/-\theta/\theta]_s$ và $[pie/-\theta/\theta]_{as}$ trong đó chỉ số “s” chỉ ra lamina đối xứng, và chỉ số “as” là lamina bất đối xứng, và θ là hướng sợi của các lớp. Tấm composite nhiều lớp không có lớp áp điện dày 1mm, và các lớp của nó có cùng độ dày. Lớp piezo có độ dày 0,1mm.

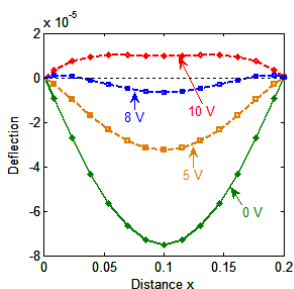
Đầu tiên, nghiên cứu tấm composite áp điện SSSS với các góc hướng sợi khác nhau bao gồm $[pie/-15/15]_{as}$, $[pie/-30/30]_{as}$, $[pie/-45/45]_{as}$ và $[pie/-45/45]_s$. Một lưới các điều khiển Bézier với các phân tử bậc hai và 13×13 phân tử được sử dụng ở đây. Bảng 4.2 hiển thị chuyển vị của điểm trọng tâm của tấm composite áp điện chịu tải phân bố đều với các điện áp đầu vào khác nhau. Kết quả của IGA-USSDT có thể được xem là trùng khớp tốt với kết quả của các tác giả khác trong trường hợp $p = 3$.

Bảng 4.2: Chuyển vị của điểm trung tâm của tấm composite áp điện tựa đơn chịu tải phân bố đều với các điện áp đầu vào khác nhau ($\times 10^{-4}\text{ m}$)

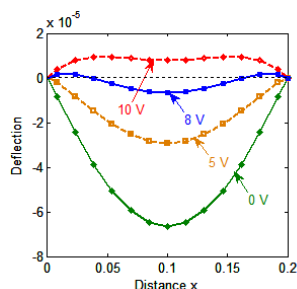
Hiệu điện thế đầu vào	Cấu trúc lớp của tấm	Phương pháp			
		CS-DSG3	RPIM	IGA-USSDT ($p = 2$)	IGA-USSDT ($p = 3$)
0V	$[pie/-45/45]_s$	-0.6326	-0.6038	-0.6230	-0.6356
	$[pie/-45/45]_{as}$	-0.6323	-0.6217	-0.6205	-0.6139
	$[pie/-30/30]_{as}$	-0.6688	-0.6542	-0.6572	-0.6656
	$[pie/-15/15]_{as}$	-0.7442	-0.7222	-0.7400	-0.7436

5V	$[pie/-45/45]_s$	-0.2863	-0.2717	-0.2767	-0.2845
	$[pie/-45/45]_{as}$	-0.2801	-0.2717	-0.2744	-0.2820
	$[pie/-30/30]_{as}$	-0.2957	-0.2862	-0.2882	-0.2965
	$[pie/-15/15]_{as}$	-0.3259	-0.3134	-0.3192	-0.3281
10V	$[pie/-45/45]_s$	0.0721	0.0757	0.0788	0.0689
	$[pie/-45/45]_{as}$	0.0601	0.0604	0.0720	0.0602
	$[pie/-30/30]_{as}$	0.0774	0.0819	0.0805	0.0686
	$[pie/-15/15]_{as}$	0.0924	0.0954	0.1015	0.0887

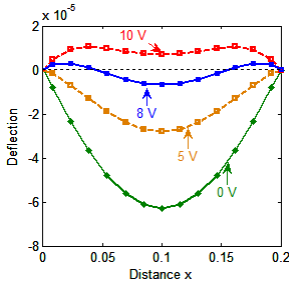
Và hình 4.3 cho thấy độ võng của tấm với các điện áp đầu vào khác nhau 0V, 5V, 8V, 10V. Độ võng giảm khi tăng điện áp đầu vào do hiệu ứng áp điện. Chuyển vị đi lên cao đối với điện áp đầu vào là 10V. Một lần nữa, chúng ta có thể thấy rằng kết quả thu được và kết quả của các là như nhau. Ngoài ra, góc hướng sợi tăng, độ lệch của tấm cũng giảm. Đối với điện áp đầu vào 10V, biên dạng lệch của nó khác với điện áp khác do vector điện trường E tạo ra lực điện trường. Lực điện trường này ngược với lực cơ. Do đó, với cùng tải cơ học, điện áp đầu vào càng lớn làm cho chuyển vị càng nhỏ hơn. Tuy nhiên, cần hạn chế giá trị của điện áp đầu vào để hạn chế sự phá hủy các cấu trúc.



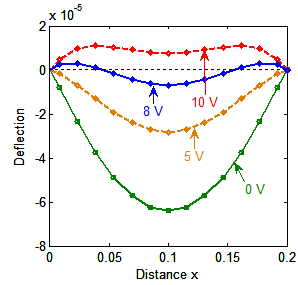
(a) $[pie/-15/15]_{as}$



(b) $[pie/-30/30]_{as}$



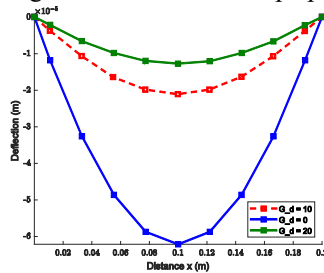
(c) $[pie/-45/45]_{as}$



(d) $[pie/-45/45]_s$

Hình 4.3 Chuyển vị đường tâm của một tấm composite áp điện tựa đơn chịu tải phân bố đều và các điện áp đầu vào khác nhau.

Tiếp theo, tác giả đưa ra nghiên cứu điều khiển đáp ứng chuyển vị tĩnh của tấm $[pie/-45/45]_s$. Trong hình 4.4, chúng ta có thể thấy ảnh hưởng của độ lợi G_d . Khi tăng G_d , độ võng trở nên nhỏ hơn. Giải thích cho điều này là khi tải bên ngoài làm biến dạng tấm, các điện tích được tạo ra trong lớp cảm biến; sau đó chúng được khuếch đại thông qua điều khiển vòng kín. Tín hiệu được chuyển đổi sau đó được gửi đến bộ truyền động và tạo ra điện áp đầu vào cho bộ truyền động. Kết quả một lực được tạo ra thông qua hiệu ứng áp điện ngược và lực này chủ động kiểm soát đáp ứng tĩnh của tấm nhiều lớp áp điện.



Hình 4.4. Ảnh hưởng của độ lợi G_d của tín hiệu hồi tiếp chuyển vị đối với độ võng tĩnh của tấm composite áp điện.

CHƯƠNG 5: PHÂN TÍCH VÀ ĐIỀU KHIỂN ĐÁP ỨNG CỦA TẤM ÁP ĐIỆN CÓ LỖ RỒNG THAY ĐỔI CHỨC NĂNG ĐƯỢC GIA CƯỜNG BẰNG CÁC TẤM GRAPHENE

Trong chương này, lần đầu tiên tác giả trình bày phân tích phần tử hữu hạn Bézier dạng hình học cho phân tích uốn và đáp ứng tức thời của các tấm có lỗ rỗng thay đổi chức năng (FGP) được gia cố bởi các tấm graphene (GPL) có dán

các lớp áp điện. Các kết quả chưa được ai công bố trước đây. Tấm vật liệu này gọi tắt là PFGP-GPL.

Cả phân tích tuyến tính và phi tuyến của các cấu trúc được đưa ra. Các tấm được cấu thành bởi một lớp lõi, chứa các lỗ bên trong và GPL phân tán trong ma trận kim loại đồng nhất hoặc không đồng nhất theo ba mẫu khác nhau và hai lớp áp điện liên kết hoàn hảo trên bề mặt trên và dưới của tấm chủ. Một lý thuyết biến dạng cắt bậc cao loại C^0 (C^0 - HSDT) được sử dụng. Ngoài ra, lý thuyết hiện tại được phát triển hơn nữa để phân tích và điều khiển các phản ứng phi tuyến hình học của các tấm PFGP-GPL. Phương pháp điều khiển phản hồi chuyển vị và vận tốc không đổi được áp dụng để điều khiển chủ động tính phi tuyến hình học cũng như các phản ứng động của các tấm xếp FG, trong đó hiệu ứng của giảm chấn cấu trúc được xem xét, dựa trên điều khiển vòng kín với áp điện cảm biến và cơ cấu chấp hành.

Trong chương này, tác giả sử dụng C^0 - HSDT được đưa ra trong chương 3 cho cấu trúc tấm này. Hàm $f(z)$ được chọn $f(z) = \text{hartan}(\frac{2z}{h}) - z$. Do công thức cho từng trường nên được xấp xỉ một cách độc lập, xấp xỉ trường điện đã được đưa ra trong chương 4.

5.1 Lý thuyết và công thức tấm PFGP-GPLs

Vecto biến dạng cho bài toán uốn:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (5.1)$$

Theo giả thiết von Kármán, mối quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị có thể được viết như sau:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \left\{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy} \right\}^T = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + z\boldsymbol{\varepsilon}^1 + f(z)\boldsymbol{\varepsilon}^2; \\ \boldsymbol{\gamma} &= \left\{ \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \right\}^T = \boldsymbol{\varepsilon}^{s0} + f'(z)\boldsymbol{\varepsilon}^{s1} \end{aligned} \quad (5.2)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^0 &= \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} w_{,x}^2 \\ w_{,y}^2 \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}^0_L + \boldsymbol{\varepsilon}^0_{NL} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^1 = - \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix}; \\ \boldsymbol{\varepsilon}^2 &= \begin{Bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{s0} = \begin{Bmatrix} w_{0,x} - \beta_x \\ w_{0,y} - \beta_y \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{s1} = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Trong đó thành phần phi tuyến được xác định

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_{,x} & 0 \\ 0 & w_{,y} \\ w_{,y} & w_{,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{A}_\theta \boldsymbol{\theta} \quad (5.4)$$

5.2. Xấp xỉ trường chuyển vị cơ

Dựa trên trích xuất Bézier của hàm cơ sở NURBS, trường chuyển vị của tấm được xấp xỉ như sau:

$$\mathbf{u}^h(\xi, \eta) = \sum_A^{m \times n} R_A^e(\xi, \eta) \mathbf{d}_A \quad (5.5)$$

Trong đó $m \times n$ là số hàm cơ sở. Trong khi đó $R_A^e(\xi, \eta)$ ký hiệu một hàm cơ sở NURBS cái mà là sự kết hợp tuyến tính giữa toán tử Bézier và đa thức và $\mathbf{d}_A = [u_{0,A} \quad v_{0,A} \quad w_A \quad \beta_{x,A} \quad \beta_{y,A} \quad \theta_{x,A} \quad \theta_{y,A}]^T$ là vecto bậc tự do tại nút liên quan đến điểm điều khiển A.

Thay thế phương trình (5.5) vào (3.13) ta có

$$[\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\gamma}]^T = \sum_{A=1}^{m \times n} \left(\mathbf{B}_A^L + \frac{1}{2} \mathbf{B}_A^{NL} \right) \mathbf{d}_A \quad (5.6)$$

Trong đó $\mathbf{B}_A^L = [\mathbf{B}_A^1 \quad \mathbf{B}_A^2 \quad \mathbf{B}_A^3 \quad \mathbf{B}_A^{s_1} \quad \mathbf{B}_A^{s_2}]^T$

$$\mathbf{B}_A^1 = \begin{bmatrix} R_{A,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{A,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_{A,y} & R_{A,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_A^2 = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & R_{A,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{A,y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{A,y} & R_{A,x} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{A,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{A,y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{A,y} & R_{A,x} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\mathbf{B}_A^{s_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{A,x} & -R_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{A,y} & 0 & -R_A & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_A^{s_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_A \end{bmatrix}$$

và \mathbf{B}_A^{NL} được tính bởi

$$\mathbf{B}_A^{NL} = \begin{bmatrix} w_{A,x} & 0 \\ 0 & w_{A,y} \\ w_{A,y} & w_{A,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{A,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{A,x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_\theta \mathbf{B}_A^g \quad (5.8)$$

5.4 Phương trình chuyển động chủ yếu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{d}} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & -\mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

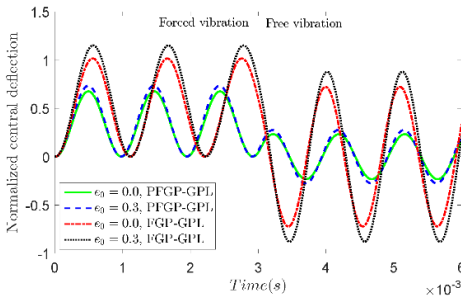
$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{uu} &= \int_{\Omega} (\mathbf{B}^L + \mathbf{B}^{NL})^T \mathbf{c} (\mathbf{B}^L + \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL}) d\Omega & ; & \quad \mathbf{K}_{u\phi} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}^L)^T \mathbf{e}^T \mathbf{B}_{\phi} d\Omega \\ \mathbf{K}_{\phi\phi} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\phi}^T \mathbf{p} \mathbf{B}_{\phi} d\Omega & ; & \quad \mathbf{M}_{uu} = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{m} \tilde{\mathbf{N}} d\Omega & ; & \quad \mathbf{f} = \int_{\Omega} \bar{q}_0 \tilde{\mathbf{N}} d\Omega \end{aligned} \quad (5.10)$$

5.5 Kết quả số

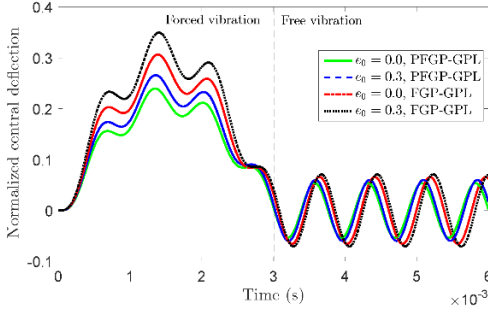
5.5.1 Phân tích đáp ứng tuyến tính của tấm FGP-GPLs

Trong ví dụ này, một tấm SSSS FGP-GPL có chiều dài 0,2 m và độ dày 0,01 m được nghiên cứu để chứng minh tính hiệu quả và độ tin cậy của phương pháp đề xuất. Đối với bài toán này, tấm FG chịu tải trọng cắt ngang phân bố hình sin trong miền không gian và thay đổi theo thời gian bao gồm tải trọng bước, hình tam giác, hình sin và tải nỏ trong đó $t_1 = 0.003 \text{ s}$; $\gamma = 330 \text{ s}^{-1}$ và $q_0 = 15 \text{ MPa}$.

Bước thời gian $\Delta t = 2.10^{-5}$ được chọn trong nghiên cứu này. Tấm được dán bởi các lớp áp điện ở cả bề mặt trên và dưới của tấm, được gọi là PFGP-GPL, với độ dày của mỗi lớp áp điện $hp = 1 \text{ mm}$. Trong ví dụ này, nghiên cứu sinh cũng nghiên cứu ảnh hưởng của các hệ số lỗ rỗng khác nhau đối với các đáp ứng tức thời của các tấm FGP-GPL và PFGP-GPL với loại phân bố lỗ rỗng 1 trong trường hợp $\Lambda_{GPL} = 0$ và $\Lambda_{GPL} = 1wt\%$, tương ứng. Chuyển vị tại tâm không thứ nguyên theo thời gian của các tấm FGP-GPL và PFGP-GPL được thể hiện tương ứng trong Hình 6.1 và Hình 6.2. Có thể thấy rằng biên độ của đáp ứng động trong trường hợp tấm PFGP-GPL nhỏ hơn trường hợp tấm FGP-GPL trong khi tấm xếp cho chuyển vị lớn hơn tấm rắn. Lưu ý rằng có thể đưa ra so sánh này vì độ dày của lớp áp điện rất mỏng. Kết hợp với vật liệu áp điện, đáp ứng động của cấu trúc sẽ giảm đi rất nhiều.

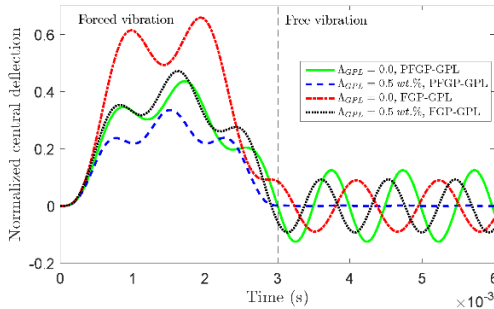


Hình 5.1: Ảnh hưởng của các hệ số lỗ rỗng khác nhau đến các đáp ứng tức thời của tấm FGP-GPL và PFGP-GPL cho loại phân bố lỗ rỗng 1 và $\Lambda_{GPL} = 0$ dưới tải bước.

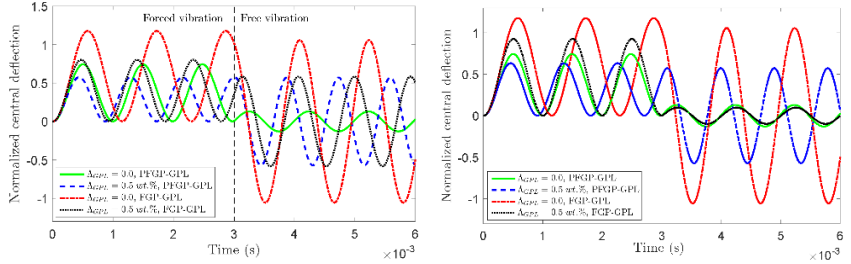


Hình 5.2: Ảnh hưởng của các hệ số lỗ rỗng khác nhau đến các đáp ứng tức thời của tấm FGP-GPL và PFGP-GPL cho loại phân bố lỗ rỗng 1 và $\Lambda_{GPL} = 1wt\%$ dưới tải sin.

Hơn nữa, ảnh hưởng của các giá trị trọng lượng GPL khác nhau đối với các đáp ứng tức thời của tấm FGP-GPL và PFGP-GPL tương ứng với loại phân bố lỗ rỗng đồng nhất và mẫu phân tán A với $e_0 = 0,2$ chịu tải hình sin cũng được đưa ra trong Hình 5.3. Hình 5.4 đưa ra chuyển vị tại tâm của tấm theo thời gian chịu tải bước với các giá trị trọng lượng GPL khác nhau cho ba mẫu phân tán GPL, loại phân bố lỗ rỗng đồng nhất và $e_0 = 0,2$. Từ Hình 5.3 và Hình 5.4, tấm PFGP-GPL cung cấp giá trị độ võng tại tâm không thứ nguyên nhỏ nhất. Ngoài ra, đồ thị đáp ứng tức thời tại tâm của các tấm FGP-GPL và PFGP-GPL đối với một số trường hợp có loại phân bố lỗ rỗng 1, mô hình phân tán A dưới tải nổ được vẽ trong Hình 5.5. Có thể quan sát rằng tấm có sự hiện diện của lỗ rỗng, được gia cố bởi GPL và được dán lớp áp điện mỏng cung cấp độ lệch rất nhỏ khi so sánh với các trường hợp khác. Như mong đợi, sự kết hợp của loại phân bố lỗ rỗng 1, kiểu phân tán GPL A và tích hợp với vật liệu áp điện là rất tuyệt vời để giảm đáp ứng hay rung động của cấu trúc tấm.

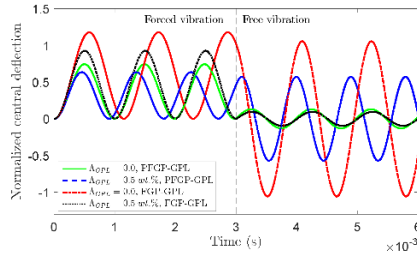


Hình 5.3: Ảnh hưởng của các giá trị trọng lượng GPL khác nhau đến các đáp ứng nhất thời của tấm FGP-GPL và PFGP-GPL cho loại phân bố lỗ rỗng đồng nhất với mẫu phân tán GPL A và $e_0 = 0,2$ chịu tải hình sin.



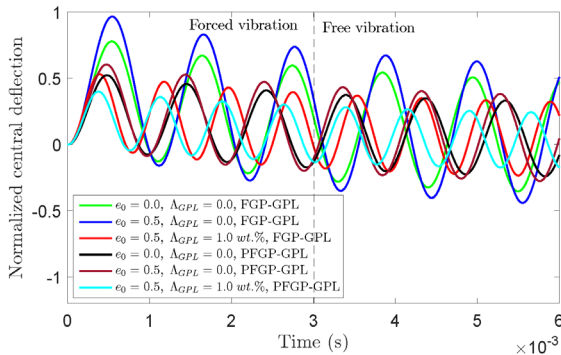
(a) Pattern A

(b) Pattern B



(c) Pattern C

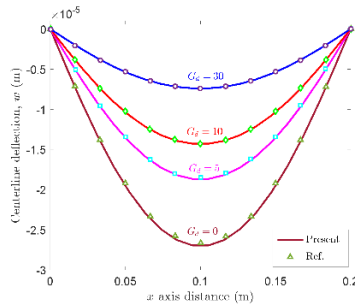
Hình 5.4: Ảnh hưởng của các giá trị trọng lượng GPL khác nhau đến các đáp ứng nhất thời của tấm FGP-GPL và PFGP-GPL cho 3 loại phân tán GPL loại phân bố lỗ rỗng đồng nhất và $e_0 = 0,2$ chịu tải bước.



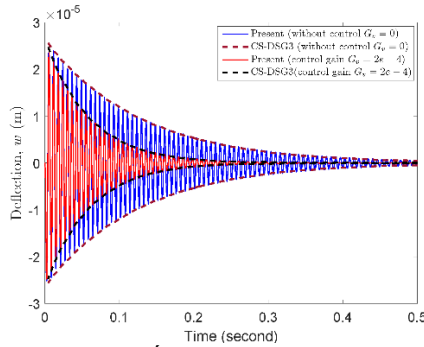
Hình 5.5: Đồ thị của đường chuyển vị tại tâm của tấm FGP-GPL và PFGP-GPL cho một số trường hợp có loại phân bố lỗ rỗng 1, mẫu A dưới tải nổ.

5.5.2 Phân tích và điều khiển đáp ứng phi tuyến của tấm PFGP-GPL

Trong phần này, điều khiển chủ động đáp ứng tĩnh và động của tấm xốp FG được gia cố bởi GPL tích hợp các cảm biến và bộ truyền động được nghiên cứu. Đầu tiên, điều khiển chủ động cho các đáp ứng tĩnh tuyến tính của tấm SSSS FG chịu tải phân bố đều với $q_0 = 100N/m^2$ được nghiên cứu để xác minh tính chính xác của phương pháp đề xuất. Tấm FG gồm vật liệu Ti-6Al-4V và nhôm oxit có chỉ số vật liệu $n = 2$ và có chiều dài cạnh $a = b = 0,2m$ trong khi độ dày của lớp FG lõi và mỗi lớp áp điện được lấy là 1 mm và 0,1 mm, tương ứng. Hình 5.6 minh họa các độ lệch tĩnh tuyến tính của tấm FG với các độ lợi chuyển vị G_d khác nhau. Có thể thấy rằng các kết quả hiện tại tương đồng tốt với lời giải tham khảo được báo cáo trong sử dụng CS-DSG3 dựa trên FSDT. Như mong đợi, khi G_d tăng, độ lệch tĩnh tuyến tính của tấm FG giảm. Hơn nữa, điều khiển chủ động cho các đáp ứng động tuyến tính của tấm FG cũng được nghiên cứu dựa trên thuật toán điều khiển phản hồi vận tốc không đổi G_v và điều khiển vòng kín. Trong ví dụ cụ thể này, tấm FG ban đầu chịu tải phân bố đều $q_0 = 100N/m^2$ và sau đó tải bị loại bỏ đột ngột. Trong nghiên cứu này, sự chùng mode được thông qua để giảm chi phí tính toán và sáu mode đầu tiên được xem xét trong không gian phân tích mode, trong khi tỷ số giảm chấn mode ban đầu cho mỗi mode được giả định là 0,8%. Hình 5.7 cho thấy các đáp ứng động tuyến tính của chuyển vị tại tâm của tấm FG. Các kết quả được tạo ra từ phương pháp hiện tại phù hợp tốt với lời giải tham khảo.



Hình 5.6: Ảnh hưởng của G_d đối với các đáp ứng tĩnh tuyến tính của tấm SSSS chịu tải phân bố đều.

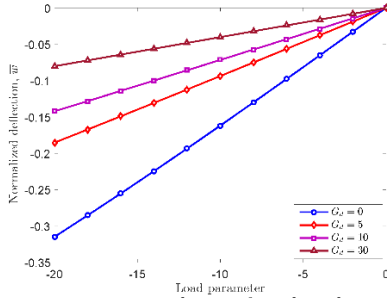


Hình 5.7: Ảnh hưởng của G_d đối với các đáp ứng động tuyến tính của tấm SSSS chịu tải phân bố đều.

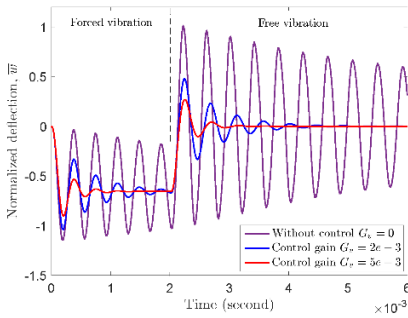
Tiếp theo, điều khiển chủ động cho các đáp ứng tĩnh phi tuyến của tấm xốp SSSS FG được gia cố bằng GPL được tiếp tục nghiên cứu trong phần này. Tấm FG bao gồm sự kết hợp của phân bố độ xốp 1 và mẫu phân tán GPL A, cung cấp hiệu suất đáp ứng cấu trúc tốt nhất, được chọn để nghiên cứu. Tấm có chiều dài cạnh $a = b = 0,4\text{m}$, độ dày của lớp lõi xốp FG $h_c = 20\text{mm}$ và độ dày của mỗi lớp áp điện $h_p = 1\text{mm}$ chịu tải trọng phân bố hình sin được xác định là $q = q_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$ với $q_0 = 1.0\text{MPa}$. Hình 5.8 mô tả độ võng tĩnh phi tuyến của tấm FG rỗng được gia cố bởi GPL với hệ số độ xốp $e_0 = 0,4$ và phần trọng lượng GPL $A_{GPL} = 1.0\text{wt.}\%$ tương ứng với các giá trị G_d khác nhau. Có thể thấy rằng độ võng của tấm xốp FG giảm đáng kể khi tăng G_d .

Trong ví dụ cuối, điều khiển chủ động cho các đáp ứng động phi tuyến hình học của tấm xốp CCCC FG được gia cố bởi GPL được tiến hành. Tấm có cả chiều dài và chiều rộng được đặt giống nhau ở mức $0,2\text{m}$ với độ dày của lớp lõi $h_c = 10\text{mm}$ và mỗi lớp áp điện $h_p = 0,1\text{mm}$. Tấm FG có phân bố độ xốp 1 ($e_0 = 0,4$) và mẫu phân tán A ($A_{GPL} = 1.0\text{wt.}\%$) chịu tải trọng phân bố hình sin. Hình 5.9 cho thấy các đáp ứng động phi tuyến của chuyển vị tại tâm của tấm FG tương ứng với các giá trị G_d khác nhau. Có thể thấy rằng khi $G_d = 0$ tương ứng với không có điều khiển, đáp ứng động phi tuyến của tấm xốp FG vẫn giảm theo thời gian vì ảnh hưởng của giảm chấn cấu trúc được xem xét trong nghiên cứu này. Quan trọng hơn, đáp ứng động phi tuyến hình học có thể bị triệt tiêu nhanh hơn trong trường hợp được điều khiển bởi các giá trị độ lợi hồi tiếp vận tốc cao hơn. Kết quả là, tùy thuộc vào các trường hợp cụ thể, các phản ứng của các cấu trúc tấm xốp FG bao gồm độ võng, thời gian dao động hoặc thậm chí cả hai có thể được điều khiển để đáp ứng yêu cầu bằng cách thiết kế một giá trị phù hợp cho giá trị khuếch đại điều khiển hồi tiếp vận tốc G_d . Cần lưu ý rằng các giá trị độ lợi hồi tiếp vận tốc không thể tăng lên mà không có giới hạn do vật liệu áp điện có giá trị điện áp riêng. Ngoài ra, Hình 5.10 mô tả ảnh hưởng của G_d lên các đáp ứng tuyến tính và phi tuyến của tấm vuông xốp CCCC FG chịu tải trọng bước. Như

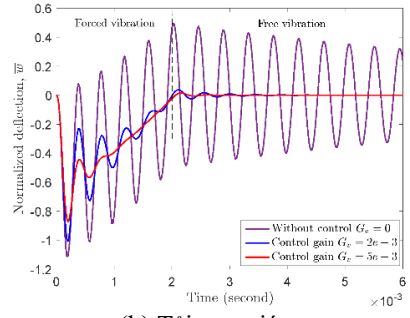
mong đợi, các phản ứng động phi tuyến hình học cung cấp cường độ nhỏ hơn của độ võng và các chu kỳ chuyển động.



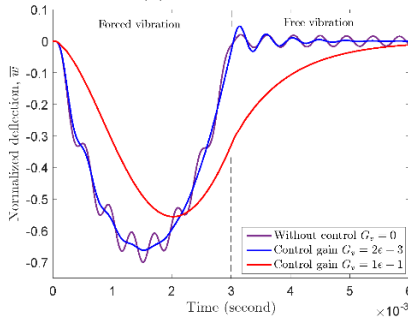
Hình 5.8: Ảnh hưởng của độ lợi điều khiển hồi tiếp chuyển vị G_d đến các đáp ứng phi tuyến tính của tấm xốp SSSS FG với loại phân bố độ xốp 1 ($e_0 = 0,2$) và mô hình phân tán A ($\Lambda_{GPL} = 1wt\%$).



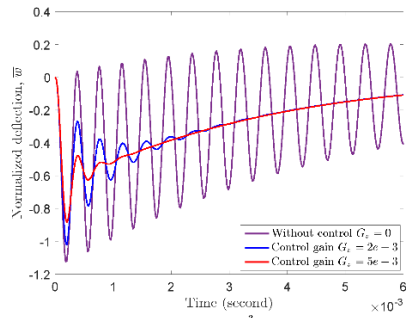
(a) Tải bước



(b) Tải tam giác

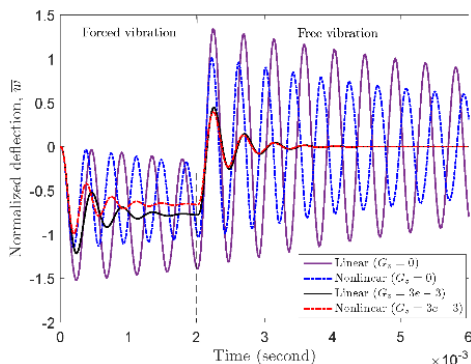


(c) Tải hình sin



(d) Tải nổ

Hình 5.9: Ảnh hưởng của độ lợi điều khiển hồi tiếp vận tốc G_v đến các đáp ứng phi tuyến động của tấm xốp CCCC FG chịu tải khác nhau.



Hình 5.10: Ảnh hưởng của độ lợi điều khiển hồi tiếp vận tốc G_v đến các đáp ứng tuyến tính và phi tuyến động của tấm xốp CCCC FG chịu tải bước.

CHƯƠNG 6: PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG TỰ DO TẤM VẬT LIỆU ÁP ĐIỆN CHỨC NĂNG CÓ LỖ RỒNG

Trong chương này, các tấm vật liệu áp điện được phân loại theo chức năng (FGPM) với sự hiện diện của lỗ rỗng được nghiên cứu. Nghiên cứu sinh gọi tấm FGPM cho ngắn gọn. Tấm FGPM được làm bằng hỗn hợp những vật liệu PZT-4 và PZT-5H. Tấm FGPM được xem xét ở cả hai dạng hoàn hảo và không hoàn hảo. Các tính chất vật liệu của tấm áp điện FG thay đổi liên tục theo hướng độ dày thông qua công thức định luật điện biến đổi (a modified power-law). Hai mô hình lỗ rỗng, phân phối đồng đều và không đồng đều, được sử dụng. Để thỏa mãn phương trình Maxwell, trong phép tính gần đúng tĩnh, một trường điện thế dưới dạng hỗn hợp của hàm cosin và tuyến tính được áp dụng. Một lý thuyết biến dạng cắt bậc cao C^0 (HSDT loại C^0) được sử dụng trong chương này. Một phương pháp phần tử hữu hạn đẳng hình học dựa trên trích xuất Bézier cũng được thực hiện. Các tấm FGPM với ảnh hưởng của điện áp bên ngoài, chỉ số power, hệ số lỗ rỗng, loại phân bố lỗ rỗng; các thông số hình học với một số hình học phức tạp và các điều kiện biên khác nhau được nghiên cứu. Kết quả thu được được so sánh với lời giải giải tích cũng như các phương pháp số có sẵn. Ngoài ra, tác giả còn nghiên cứu thêm một số tấm FGPM với hình học cong, mà lời giải giải tích chưa được biết, được coi là lời giải tham khảo cho các nghiên cứu trong tương lai.

6.1. Động học của tấm FGPM

Hàm của điện thế được chọn sao cho sự phân bố điện và từ thông qua độ dày tấm được thỏa mãn phương trình Maxwell trong xấp xỉ gần đúng tĩnh:

$$\Phi(x, y, z, t) = g(z)\phi(x, y, t) + \frac{2z}{h}V_0 e^{i\omega t} \quad (6.1)$$

trong đó V_0 là điện áp áp vào, $g(z)$ là hàm phân bố bất kỳ của tọa độ z , $\phi(x, y, t)$ là hàm điện thế trong mặt phẳng tham chiếu và ω là giá trị riêng. Trong chương này, $g(z)$ được đưa ra như.

Theo phương trình (6.1), các điện trường (E_x , E_y và E_z) trở thành:

$$\begin{aligned} E_x &= -\Phi_{,x} = -g(z)\phi_{,x}; \quad E_y = -\Phi_{,y} = -g(z)\phi_{,y}; \\ E_z &= -\Phi_{,z} = -g'(z)\phi - \frac{2V_0}{h}e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Đối với một tấm xốp áp điện FG, các mối quan hệ cấu thành chủ yếu được mô tả bởi:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{kij}E_k \\ D_i &= e_{ikl}\varepsilon_{kl} + k_{ik}E_k \end{aligned} \quad (6.3)$$

trong đó σ_{ij} , ε_{kl} , D_i và E_k là ứng suất, biến dạng, chuyển vị điện và trường điện; C_{ijkl} , e_{ijk} và k_{ik} là ma trận hệ số đàn hồi, ma trận hệ số áp điện và ma trận hệ số điện môi.

Vecto trường điện \mathbf{E} có thể được diễn tả như sau

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\phi = -\nabla\phi \quad (6.4)$$

Các công thức trong phương trình (6.3) cũng được viết lại rõ ràng theo các dạng ma trận như sau:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^b &= \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & 0 \\ \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{c}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{e}_{31} \\ 0 & 0 & \tilde{e}_{31} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{Bmatrix} = \mathbf{C}^b \boldsymbol{\varepsilon}^b - \mathbf{C}_c^b \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\tau}^s &= \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{55} & 0 \\ 0 & \tilde{c}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{e}_{15} & 0 \\ 0 & \tilde{e}_{14} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \end{Bmatrix} = \mathbf{C}^s \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{C}_c^s \mathbf{E}^s \\ \mathbf{D}^p &= \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{e}_{15} & 0 \\ 0 & \tilde{e}_{14} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_c^s \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{C}^k \mathbf{E}^s \\ D^z &= \tilde{e}_{31}\varepsilon_x + \tilde{e}_{32}\varepsilon_y + \tilde{k}_{33}E_z \end{aligned} \quad (6.5)$$

trong đó \tilde{c}_{ij} , \tilde{e}_{ij} và \tilde{k}_{ij} định nghĩa hệ số ma trận giảm của tấm FGPM và chúng được diễn tả như sau:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{11} &= c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}, \tilde{c}_{12} = c_{12} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}, \tilde{c}_{66} = c_{66} \\ \tilde{e}_{31} &= e_{31} + \frac{c_{13}e_{33}}{c_{33}}, \tilde{k}_{11} = k_{11}, \tilde{k}_{33} = k_{33} + \frac{e_{33}^2}{c_{33}}\end{aligned}\quad (6.6)$$

Sử dụng nguyên lý Hamilton, để có được các phương trình điều khiển của dao động tự do cho các tấm FGPM

$$\int_0^t (\delta\Pi_S - \delta\Pi_K + \delta\Pi_I) dt = 0 \quad (6.7)$$

trong đó Π_S , Π_K và Π_I là năng lượng do biến dạng, động năng và thế năng do ứng suất ban đầu được tạo ra từ việc áp hiệu điện thế tương ứng.

Năng lượng biến dạng $\delta\Pi_S$ được định nghĩa là

$$\delta\Pi_S = \int_{\hat{V}} \left(\sigma_{xx} \delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta\varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta\gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta\gamma_{yz} - \dots \right) d\hat{V} \quad (6.8)$$

Thay thế phương trình (6.5) vào phương trình (6.8), dạng yếu Galerkin có thể được viết lại thành

$$\begin{aligned}\delta\Pi_S &= \int_{\hat{V}} \left(\left(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^b \right)^T \mathbf{C}^b \boldsymbol{\varepsilon}^b - \left(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^b \right)^T \mathbf{C}_c^b \mathbf{E}^b + \delta\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{C}^s \boldsymbol{\gamma} - \delta\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{C}_c^s \mathbf{E}^s - \right. \\ &\quad \left. \left(\delta\mathbf{E}^s \right)^T \mathbf{C}_c^s \boldsymbol{\gamma} - \left(\delta\mathbf{E}^s \right)^T \mathbf{C}^k \mathbf{E}^s \right) d\hat{V} - \\ &\quad \int_{\hat{V}} \left(\delta E_z \right)^T \left(\tilde{e}_{31} \varepsilon_x + \tilde{e}_{32} \varepsilon_y + \tilde{k}_{33} E_z \right) d\hat{V}\end{aligned}\quad (6.9)$$

trong đó

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z\varepsilon_x^1 + f(z)\varepsilon_x^2; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + z\varepsilon_y^1 + f(z)\varepsilon_y^2 \quad (6.10)$$

Phương trình (6.9) có thể được chia thành hai tích phân độc lập theo hướng bề mặt giữa và hướng trục z như:

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_S = & \int_{\Omega} (\hat{\mathbf{e}}^b)^T \hat{\mathbf{C}}^b \delta\hat{\mathbf{e}}^b d\Omega + \left(\int_{\Omega} (\boldsymbol{\phi}^b)^T \hat{\mathbf{C}}_c^{b1} \boldsymbol{\varepsilon}^0 d\Omega + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\phi}^b)^T \hat{\mathbf{C}}_c^{b2} \boldsymbol{\varepsilon}^1 d\Omega + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\phi}^b)^T \hat{\mathbf{C}}_c^{b3} \boldsymbol{\varepsilon}^2 d\Omega \right) + \\
& \int_{\Omega} (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^s)^T \hat{\mathbf{C}}^s \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^s d\Omega + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\phi}^s)^T \hat{\mathbf{C}}_c^s \delta\boldsymbol{\varepsilon}^s d\Omega + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}^s)^T \hat{\mathbf{C}}_c^s \delta\boldsymbol{\phi}^s d\Omega + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\phi}^s)^T \hat{\mathbf{C}}^k \delta\boldsymbol{\phi}^s d\Omega + \\
& \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x^0 \tilde{e}_{31}^1 \delta\phi^z d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_x^1 \tilde{e}_{31}^2 \delta\phi^z d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_x^2 \tilde{e}_{31}^3 \delta\phi^z d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_y^0 \tilde{e}_{32}^1 \delta\phi^z d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_y^1 \tilde{e}_{32}^2 \delta\phi^z d\Omega + \right. \\
& \left. \int_{\Omega} \varepsilon_y^2 \tilde{e}_{32}^3 \delta\phi^z d\Omega + \int_{\Omega} \phi^z \tilde{k}_{33} \delta\phi^z d\Omega - e^{i\omega t} \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) dz \int_{\Omega} \frac{2V_0}{h} \tilde{k}_{33} \delta\phi^z d\Omega \right)
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Vế bên trái của phương trình (6.11) có thể được viết lại dưới dạng nhỏ gọn như:

$$\delta\Pi_S = \delta\Pi_1 + \delta\Pi_2 + \delta\Pi_3 + \delta\Pi_4 + \delta\Pi_5 + \delta\Pi_6 + \delta\Pi_7 \tag{6.12}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_1 &= \int_{\Omega} (\hat{\mathbf{e}}^b)^T \hat{\mathbf{C}}^b \delta\hat{\mathbf{e}}^b d\Omega; \\
\delta\Pi_2 &= \int_{\Omega} (\boldsymbol{\phi}^b)^T \hat{\mathbf{C}}_c^{b1} \boldsymbol{\varepsilon}^0 d\Omega + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\phi}^b)^T \hat{\mathbf{C}}_c^{b2} \boldsymbol{\varepsilon}^1 d\Omega + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\phi}^b)^T \hat{\mathbf{C}}_c^{b3} \boldsymbol{\varepsilon}^2 d\Omega; \\
\delta\Pi_3 &= \int_{\Omega} (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^s)^T \hat{\mathbf{C}}^s \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^s d\Omega; \quad \delta\Pi_4 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\phi}^s)^T \hat{\mathbf{C}}_c^s \delta\boldsymbol{\varepsilon}^s d\Omega; \\
\delta\Pi_5 &= \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}^s)^T \hat{\mathbf{C}}_c^s \delta\boldsymbol{\phi}^s d\Omega; \quad \delta\Pi_6 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\phi}^s)^T \hat{\mathbf{C}}^k \delta\boldsymbol{\phi}^s d\Omega; \\
\delta\Pi_7 &= \int_{\Omega} \varepsilon_x^0 \tilde{e}_{31}^1 \delta\phi^z d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_x^1 \tilde{e}_{31}^2 \delta\phi^z d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_x^2 \tilde{e}_{31}^3 \delta\phi^z d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_y^0 \tilde{e}_{32}^1 \delta\phi^z d\Omega + \int_{\Omega} \\
& \int_{\Omega} \varepsilon_y^1 \tilde{e}_{32}^2 \delta\phi^z d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_y^2 \tilde{e}_{32}^3 \delta\phi^z d\Omega + \int_{\Omega} \phi^z \tilde{k}_{33} \delta\phi^z d\Omega - e^{i\omega t} \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) dz \int_{\Omega} \frac{2V_0}{h} \tilde{k}_{33} \delta\phi^z d\Omega
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Để biết chi tiết về từng công thức và xấp xỉ, vui lòng xem luận án.

6.2. Ví dụ số

Trước tiên, xem xét một tấm vuông áp điện chức năng không có lỗ rỗng có phần bị cắt phức tạp, như trong Hình 6.1a. Hình 6.1b minh họa một lưới gồm 336 điểm điều khiển với các phân tử Bézier bậc hai. Các điều kiện biên tựa đơn và ngàm hoàn toàn được sử dụng. Đầu tiên, để chứng minh tính hiệu quả và chính xác của giải pháp hiện tại so với các giải pháp khác, tác giả nghiên cứu tấm vuông FG có một lỗ có hình dạng phức tạp được làm từ zirconia (ZrO₂-2) và nhôm (Al). Các thông số vật liệu được đưa ra là:

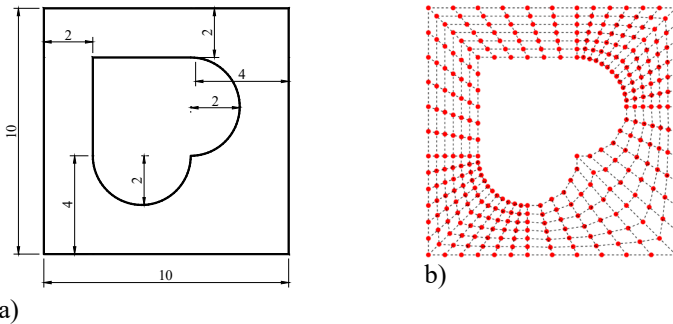
$$E_c = 200\text{GPa}; \quad \nu_c = 0.3; \quad \rho_c = 3000\text{kg/m}^3 \text{ và}$$

$E_m = 70\text{GPa}; \quad \nu_m = 0.3; \quad \rho_m = 2707\text{kg/m}^3$, trong đó "c" và "m" là ký hiệu của gốm và kim loại, tương ứng. Tần số không thứ nguyên được chuẩn hóa bởi

$\tilde{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_c / E_c}$. So sánh sáu tần số không thứ nguyên đầu tiên giữa lời giải

hiện tại với các tần số được đưa ra trong dựa trên lý thuyết đàn hồi 3D sử dụng IGA được trình bày trong Bảng 6.1. Đồng thời, kết quả đạt được với các giá trị chỉ số power khác nhau cũng được so sánh với các lời giải được báo cáo trong bằng phương pháp không có lưới dựa trên TSDT. Có thể thấy rằng giải pháp hiện tại có sự tương đồng tốt với kết quả tham khảo cho các giá trị chỉ số power khác nhau và hai điều kiện biên. Các giá trị tần số không thứ nguyên giảm khi tăng các giá trị chỉ số power.

Tiếp theo, phân tích ứng xử của tấm FGPM được đưa ra. Các tần số không thứ nguyên được tính bằng $\tilde{\omega} = \omega b^2 / h \sqrt{(\rho / c_{11})_{PZT-4}}$. Kết quả số cho tần số không thứ nguyên của tấm FGPM hoàn hảo và không hoàn hảo được liệt kê tương ứng trong Bảng 6.2 và Bảng 6.3. Ảnh hưởng của điện áp, điều kiện biên và giá trị chỉ số power đến tần số không thứ nguyên được đưa ra. Các kết quả thu được giảm khi giá trị chỉ số power và điện áp tăng cho cả hai điều kiện biên SSSS và CCCC. Sự thay đổi của tần số không thứ nguyên với các tỷ lệ a/h và hiệu điện thế khác nhau ($\alpha = 0.2$, $g = 5$) cũng được trình bày trong Bảng 6.4. Có thể thấy rằng tần số phụ thuộc mạnh vào chiều dày tấm và hiệu điện thế áp vào. Các giá trị thu được tăng cho các tấm FGP dày và dày vừa phải cho tất cả các điều kiện biên và hiệu điện thế áp đã cho. Tuy nhiên, khi độ dày của tấm trở nên mỏng hơn ($a/h = 150, 200, 250$) thì ảnh hưởng của hiệu điện thế là rất đáng kể. Có thể nhận thấy rằng với sự gia tăng của một mảng có giá trị a/h , giá trị âm của điện áp áp vào làm tăng giá trị tần số tự nhiên, trong khi điện áp dương làm cho kết quả thu được giảm đi. Hơn nữa, vì $V_0 = 0$, tần số tự nhiên của các tấm FGPM không bị ảnh hưởng nhiều bởi các giá trị cao hơn của tỷ số a/h . Ngoài ra, sáu hình dạng mode đầu tiên và tần số không thứ nguyên tương ứng cho tấm vuông CCCC FGPM-I có lỗ cắt phức tạp ($a/h = 50, V_0 = 0, g = 5$) được hiển thị trong Hình 6.2.



Hình 6. 1. a) Hình học và b) Một lưới gồm 336 điểm điều khiển với các phần tử Bézier bậc hai của một tấm vuông có lỗ cắt phức tạp

Bảng 6. 1: So sánh tần số không thứ nguyên $\tilde{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_c / E_c}$ một tấm vuông có lỗ cắt phức tạp ($a=b=10, a/h=20$).

g	Phương pháp	Modes					
		1	2	3	4	5	6
a) SSSS BCs							
0	IGA-3D	7.16	11.65	13.09	20.99	21.85	22.54
	Không lưới	7.1586	11.939	13.398	21.510	22.437	23.426
	<u>Hiện tại</u>	7.1919	11.759	13.274	21.260	21.871	22.918
1	IGA-3D	6.58	10.73	12.06	19.35	20.77	20.92
	Không lưới	6.5853	11.002	12.343	19.828	21.452	21.627
	<u>Hiện tại</u>	6.6167	10.838	12.233	19.601	20.915	21.163
5	IGA-3D	6.71	10.88	12.24	19.60	19.73	21.00
	Không lưới	6.7111	11.148	12.519	20.071	20.252	21.817
	<u>Hiện tại</u>	6.7503	11.022	12.443	19.741	19.922	21.460
20	IGA-3D	6.46	10.48	11.79	18.89	19.05	20.25
	Không lưới	6.5590	10.904	12.243	19.586	19.635	21.348
	<u>Hiện tại</u>	6.5932	10.760	12.148	19.091	19.447	20.941
50	IGA-3D	6.19	10.07	11.32	18.15	18.81	19.48
	Không lưới	6.3642	10.597	11.896	19.089	19.400	20.772
	<u>Hiện tại</u>	6.3952	10.446	11.793	18.883	18.910	20.344
100	IGA-3D	6.15	10.00	11.25	18.04	18.78	19.36
	Không lưới	6.2664	10.442	11.720	18.812	19.332	20.478
	<u>Hiện tại</u>	6.2964	10.290	11.616	18.602	18.844	20.047
b) CCCC BCs							
0	IGA-3D	15.8	27.28	27.45	33.22	34.28	41.21
	Không lưới	16.032	27.280	27.536	33.849	35.196	43.108
	<u>Hiện tại</u>	15.979	27.445	27.550	33.535	34.584	41.927
1	IGA-3D	14.62	25.17	25.32	30.68	31.67	38.10
	Không lưới	14.783	25.188	25.423	31.291	32.540	39.898
	<u>Hiện tại</u>	14.737	25.334	25.430	30.996	31.972	38.808
5	IGA-3D	14.79	25.38	25.54	30.83	31.80	38.16
	Không lưới	14.949	25.374	25.621	31.410	32.646	39.895
	<u>Hiện tại</u>	14.971	25.691	25.790	31.362	32.339	39.169
20	IGA-3D	14.41	24.74	24.90	30.07	31.02	37.23
	Không lưới	14.625	24.830	25.069	30.748	31.962	39.074
	<u>Hiện tại</u>	14.612	25.071	25.168	30.594	31.546	38.196

50	IGA-3D	13.8	23.79	23.93	28.95	29.87	35.90
	Không lưới	14.223	24.174	24.404	29.966	31.154	38.123
	Hiện tại	14.190	24.359	24.453	29.744	30.672	37.160
100	IGA-3D	13.64	23.45	23.60	28.56	29.47	35.43
	Không lưới	14.018	23.839	24.064	29.564	30.738	37.630
	Hiện tại	13.980	24.005	24.098	29.322	30.239	36.647

Bảng 6. 2: Tần số không thứ nguyên đầu tiên $\tilde{\omega} = \omega b^2 / h \sqrt{(\rho / c_{11})_{PZT-4}}$ của tấm FGP hoàn hảo vuông có lỗ cắt phức tạp ($\alpha = 0$) với các hiệu điện thế khác nhau ($a=b=10, a/h=20$).

V_0	BC	FGPM hoàn hảo					
		$g=0$	$g=1$	$g=5$	$g=20$	$g=50$	$g=100$
-500	SSSS	5.8501	5.4275	5.2457	5.1149	5.0622	5.0409
	CCCC	15.0403	14.0986	13.6657	13.3776	13.2683	13.2248
0	SSSS	5.8497	5.4270	5.2453	5.1143	5.0617	5.0403
	CCCC	15.0400	14.0983	13.6655	13.3773	13.2680	13.2246
500	SSSS	5.8493	5.4265	5.2448	5.1138	5.0613	5.0399
	CCCC	15.0397	14.0980	13.6653	13.3770	13.2678	13.2244

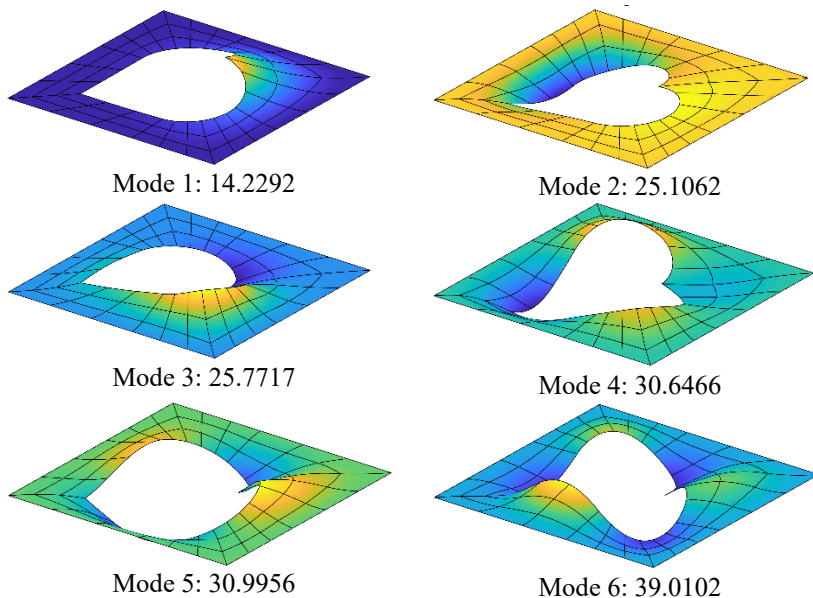
Bảng 6. 3: Tần số không thứ nguyên đầu tiên $\tilde{\omega} = \omega b^2 / h \sqrt{(\rho / c_{11})_{PZT-4}}$ của tấm vuông FGPM rỗng có lỗ cắt phức tạp ($\alpha = 0.2$) với các hiệu điện thế khác nhau ($a=b=10, a/h=20$).

V_0	BC	Porous FGPM-I			Porous FGPM-II		
		$g=0$	$g=1$	$g=5$	$g=0$	$g=1$	$g=5$
-					6.0248	5.5644	5.3669
500	SSSS	5.9470	5.4161	5.1898			
	CCCC	15.2538	14.0702	13.5298	15.4377	14.4097	13.9347
0	SSSS	5.9466	5.4156	5.1893	6.0244	5.5639	5.3664
	CCCC	15.2536	14.0700	13.5296	15.4375	14.4095	13.9345
500	SSSS	5.9462	5.4152	5.1889	6.0240	5.5635	5.3660
	CCCC	15.2534	14.0698	13.5294	15.4373	14.4094	13.9343

Bảng 6. 4: Tần số không thứ nguyên đầu tiên $\tilde{\omega}$ của tấm vuông FGPM rỗng có lỗ cắt phức tạp với các tỷ số a/h khác nhau ($a=b=10, \alpha = 0.2, g=5$).

BC	a/h	FGPM-I	FGPM-II
----	-------	--------	---------

		$V_0 = -$			$V_0 = -$		
		500	$V_0=0$	$V_0=500$	500	$V_0=0$	$V_0=500$
SS	20	5.1898	5.1894	5.1884	5.366	5.366	5.360
SS	50	5.3195	5.3122	5.3048	5.5039	5.4968	5.4897
	100	5.4438	5.3855	5.3265	5.6299	5.5737	5.5168
	150	5.6222	5.4296	5.2281	5.8048	5.6187	5.4247
	200	5.9141	5.4722	4.9818	6.0889	5.6612	5.1901
	250	6.3431	5.4997	4.5101	6.5071	5.6983	4.7426
CC	20	13.5298	13.5296	13.5294	13.934	13.934	13.9343
CC	50	14.2322	14.2292	14.2263	14.694	14.691	14.6888
	100	14.8413	14.5181	14.7948	15.321	15.298	15.2763
	150	15.4552	14.8778	14.5998	15.934	15.359	14.9844
	200	16.1832	14.9018	14.0176	16.656	15.481	14.3038
	250	17.0282	14.9380	13.5174	17.495	15.516	13.8091



Hình 6. 2. Sáu hình dạng mode đầu tiên của tấm ngăn FGPM-I có lỗ cắt phức tạp ($a/h=50$, $V_0=0$, $g=5$, $\alpha=0.2$).

CHƯƠNG 9: KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

7.1 Kết luận

Trong luận án này, tác giả đã phát triển phương pháp phần tử hữu hạn đẳng hình học dựa trên trích xuất Bézier để phân tích và điều khiển đáp ứng của kết cấu tấm nhiều lớp. Bốn mô hình vật liệu đã được xem xét bao gồm tấm composite nhiều lớp, tấm composite nhiều lớp có dán lớp áp điện, tấm có lỗ rỗng thay đổi chức năng dán lớp áp điện được gia cường bằng các tấm graphene (PFGP-GPLs) và tấm vật liệu áp điện chức năng có lỗ rỗng (FGPMP). Luận án gồm có hai phần: a) Phân tích và b) Điều khiển.

Một số kết luận chính có thể được nêu ra như sau:

- Sự kết hợp IGA dựa trên trích xuất Bézier với UHSDT và C^0 -HSDT để phân tích tĩnh, dao động tự do, đáp ứng động và điều khiển tĩnh, động học cho bốn mô hình vật liệu tấm đã được nghiên cứu một cách hiệu quả. Bằng cách sử dụng toán tử trích xuất Bézier, việc triển khai IGA trở nên dễ dàng hơn đáng kể với các hàm cơ sở Bernstein, có sự tương đồng gần với các hàm dạng Lagrange khi sử dụng các phần tử Bézier liên tục C^0 . Đây có thể là một lựa chọn hợp lý vì các hàm cơ sở được đưa ra dưới dạng địa phương chứ không phải toàn cục giống như việc sử dụng hàm NURBS trong IGA truyền thống và cách triển khai trong IGA tương tự như trong FEM.
- Bằng cách sử dụng UHSDT và C^0 -HSDT với 7 ẩn số, phương pháp được đề xuất sẽ làm cho phép một giá trị ứng suất cắt ngang khác 0 ở mặt dưới và mặt trên của tấm và không sử dụng hệ số hiệu chỉnh cắt. Hơn nữa, trường chuyển vị của HSDT và CPT có liên quan đến đạo hàm còn được gọi là các thành phần slop. Trong một số hình học phức tạp với các điều kiện biên đối xứng, thường khó thực thi các điều kiện biên cho các thành phần slop này, do sự không đồng nhất của các biến xấp xỉ. Vì vậy, lý thuyết biến dạng cắt bậc tự do được sử dụng trong luận án này.
- Trong các phân tích tĩnh, dao động tự do và động học sử dụng UHSDT, các kết quả của phương pháp đề xuất phù hợp tốt với các lời giải giải tích và một số phương pháp đã công bố khác. Thông qua phân tích, các kết quả bằng số chỉ ra rằng phương pháp được đề xuất đạt được độ tin cậy cao so với các giải pháp được công bố khác và tốt hơn một chút so với UTSDT sử dụng IGA dựa trên trích xuất Bézier. Thật thú vị, kết quả thu được phù hợp tốt với các nghiên cứu còn tồn tại hoặc các giải pháp có sẵn trong tài liệu. Hơn nữa, các kết quả số cho các tấm PFGPM và FG xấp áp điện được gia cố bằng GPL cũng đã đạt được. Được biết, cho đến nay vẫn chưa có giải giải tích nào đưa ra, vì vậy các phương pháp số này có thể được coi là lời giải tham khảo cho các công trình nghiên cứu trong tương lai.
- Tác giả nghiên cứu cả tuyến tính và phi tuyến của tấm rỗng thay đổi chức năng được gia cố bởi GPL với cảm biến áp điện và bộ truyền động. Các

phương trình phi tuyến hình học được giải bằng quy trình lặp Newton-Raphson và phương pháp Newmark. Ảnh hưởng của các hệ số lỗ rỗng, tỷ số trọng lượng của GPL cũng như điện áp bên ngoài đến ứng xử tuyến tính và phi tuyến hình học của các tấm với các loại phân bố lỗ rỗng mô hình phân tán GPL khác nhau được nghiên cứu chi tiết qua các ví dụ số. Độ cứng của tấm xốp FG giảm đáng kể do hệ số độ xốp. Tuy nhiên, độ cứng của các tấm tăng đáng kể khi tấm xốp FG được gia cố bằng GPL. Các kết quả thu được về mặt chuyển vị và biên độ dao động của tấm xốp FG không có GPL lớn hơn so với kết quả đạt được cho tấm xốp FG có GPL.

- Lần đầu tiên nghiên cứu sinh trình bày một phương pháp phần tử hữu hạn Bézier đẳng hình học và kết hợp nó với lý thuyết HSDT loại C^0 để phân tích bài toán coupling cơ điện của các tấm vật liệu áp điện phân loại chức năng với các lỗ rỗng. Thông qua phân tích dao động tự do, người ta thấy rằng điện áp bên ngoài, chỉ số power, hệ số độ xốp, loại phân bố độ rỗng, kích thước hình học và các điều kiện biên khác nhau ảnh hưởng đáng kể đến tần số tự nhiên của các cấu trúc.
- Các thuật toán điều khiển dựa trên tín hiệu hồi tiếp chuyển vị và vận tốc không đòi được ứng dụng để điều khiển các đáp ứng tĩnh và động cả tuyến tính và phi tuyến tính hình học của tấm, trong đó hiệu ứng của giảm chấn cấu trúc được xem xét, dựa trên điều khiển vòng kín với các cảm biến và bộ truyền động áp điện. Đối với điều khiển đáp ứng tĩnh phi tuyến hình học của các tấm xốp FG, hai thuật toán hiệu quả được xem xét, bao gồm điều khiển điện áp đầu vào với các dấu hiệu điện thế ngược nhau được áp dụng trên độ dày của hai lớp áp điện và thuật toán điều khiển tín hiệu hồi tiếp chuyển vị.
- Trong luận án này, ngoài một số ví dụ bằng số với hình vuông hoặc hình tròn/elip, có nhiều hình học phức tạp khác nhau có thể được mô hình hóa dễ dàng bằng phương pháp nhiều patches. Những hình học phức tạp này có thể nâng lợi thế của IGA lên tối đa.

7.2 Đề xuất

Thông qua các kết quả thu được, nghiên cứu sinh tin rằng phương pháp được đề xuất với nhiều điểm mới có thể cung cấp một nguồn tham khảo đáng tin cậy để tính toán các ứng xử của các cấu trúc tấm nhiều lớp. Tuy nhiên, một số hạn chế nên được đề cập cũng như các đề xuất cho việc mở rộng hướng của nghiên cứu này như sau:

- Nghiên cứu trong tương lai của công trình này nên được thực hiện với sự hiện diện của lực kéo song song với các bề mặt của tấm trong các ví dụ bằng số (ví dụ: ma sát tiếp xúc hoặc dòng chảy lớp biên).
- Có thể xem xét các điều kiện biên khác nhau thay vì điều kiện Dirichlet đồng nhất chỉ được sử dụng trong luận án này.
- Một hướng nghiên cứu khác là mở rộng các lý thuyết 2D này thành các lý thuyết 3D hoàn toàn hoặc gia 3D.

- Phương pháp đề xuất nên được áp dụng cho các cấu trúc vi mô sử dụng lý thuyết nonlocal elasticity và modified couple stress.
- IGA có thể được sử dụng để tính toán cho các bài toán khác nhau như không nên được, phân tích phase-field, biến dạng lớn với độ méo lưới và tối ưu hóa hình dạng.
- Phương pháp này nên được áp dụng trong lĩnh vực công nghiệp, ví dụ: máy móc, ô tô, hoặc các cấu trúc giàn khoan ngoài khơi, v.v.

CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ

- **Articles in ISI-covered journal**

1. **Lieu B. Nguyen**, Chien H. Thai and H. Nguyen-Xuan. A generalized unconstrained theory and isogeometric finite element analysis based on Bézier extraction for laminated composite plates. *Engineering with Computers*, 32(3), pp. 457-475, 2016.
2. P. Phung-Van, **Lieu B. Nguyen**, L.V. Tran, T.D. Dinh, H.C. Thai, S.P.A. Bordas, M.A. Wahab, H Nguyen-Xuan. An efficient computational approach for control of nonlinear transient responses of smart piezoelectric composite plates. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 76, pp. 190-202, 2015.
3. **Lieu B. Nguyen**, Nam V. Nguyen, Chien H. Thai, A.M. J. Ferreira, H. Nguyen-Xuan. An isogeometric Bézier finite element analysis for piezoelectric FG porous plates reinforced by graphene platelets. *Composite Structure*, 214, pp. 227-245, 2019.
4. **Lieu B. Nguyen**, Chien H. Thai, A.M. Zenkour, H. Nguyen-Xuan. An isogeometric Bézier finite element method for vibration analysis of functionally graded piezoelectric material porous plates. Submitted in *International Journal of Mechanical Sciences*, IF: 3.57; revising.
5. Nam V. Nguyen, **Lieu B. Nguyen**, Jaehong Lee, H. Nguyen-Xuan. Analysis and control of geometrically nonlinear responses of piezoelectric FG porous plates with graphene platelets einforcement using Bézier extraction. Submitted in *European Journal of Mechanics / A Solids*, IF: 2.881

- **Articles in national scientific journal**

1. **Lieu B. Nguyen**, H.C. Thai, Ngon T. Dang, H. Nguyen Xuan. Transient Analysis of Laminated Composite Plates Using NURBS- Based Finite Elements. *Vietnam Journal of Mechanics*, Vol. 36, No. 4, pp.267-281, 2016.

- **International Conference**

1. **Lieu B. Nguyen**, Chien H. Thai, H. Nguyen-Xuan. Isogeometric analysis of laminated composite plates using a new unconstrained theory. *Proceedings of ICEMA-3, Ha Noi City, Viet Nam*, pp. 441-449, 2014.
2. **Lieu B. Nguyen**, Chien H. Thai, H. Nguyen-Xuan. Transient Analysis of Laminated Composite Plates Using Isogeometric Analysis. *Proceedings of GTSD'14, Ho Chi Minh City, Viet Nam*, pp. 73-82, 2014.

- **National Conference**

1. **Lieu B. Nguyen**, Chien H. Thai, H. Nguyen-Xuan. A novel four variable layerwise theory for laminated composite plates based on isogeometric analysis. *Proceedings of the National Conference on Mechanical Engineering, Da Nang City, Viet Nam*, pp. 758-768, 2015.
2. **Lieu B. Nguyen**, H. Nguyen-Xuan. Isogeometric approach for static analysis of laminated composite plates. *Proceedings of the National Conference on science and technology in mechanics IV, Ho Chi Minh City, Viet Nam*, pp. 177-187, 2015.

**MINISTRY OF EDUCATION AND TRAINING
HO CHI MINH CITY
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND EDUCATION**

NGUYEN THI BICH LIEU

**DEVELOPMENT OF ISOGEOMETRIC FINITE ELEMENT METHOD
TO ANALYZE AND CONTROL THE RESPONSE OF THE
LAMINATED PLATE STRUCTURES**

PHD THESIS SUMMARY

MAJOR: ENGINEERING MECHANICS

CODE: 9520101

Ho Chi Minh City, 10/ 2019

THE WORK IS COMPLETED AT
HO CHI MINH CITY
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND EDUCATION

Supervisor 1: Assoc. Prof. Dr. NGUYEN XUAN HUNG

Supervisor 2: Assoc. Prof. Dr. DANG THIEN NGON

PhD thesis is protected in front of
EXAMINATION COMMITTEE FOR PROTECTION OF DOCTORAL
THESIS
HCM CITY UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND EDUCATION,

Date month year

ABSTRACT

In this dissertation, an isogeometric finite element formulation is developed based on Bézier extraction to solve various plate problems, using a seven-dof higher-order shear deformation theory for both analysis and control the responses of laminated plate structures. The main advantage of the isogeometric analysis (IGA) is to use the same basis function to describe the geometry and to approximate the problem unknowns. IGA gives the results with higher accuracy because of the smoothness and the higher-order continuity between elements. For the last decade of development, isogeometric analysis has surpassed the standard finite elements in terms of effectiveness and reliability for various problems, especially for the ones with complex geometry.

In the conventional isogeometric analysis, the B-spline or Non-uniform Rational B-spline (NURBS) basis functions span over the entire domain of structures not just a local domain as Lagrangian shape functions in FEM. The global structure induces the complex implementation in a traditional finite element context. In addition, in order to compute the shape functions, the Gaussian integration points force to transform to parametric space. By choosing Bernstein polynomials as the basis functions, IGA will be performed easily similar to the way of implementation in FE framework. The B-spline/NURBS basis can be rewritten in form of the combination of Bernstein polynomials and Bézier extraction operator. That is called Bézier extraction for B-spline/NURBS.

Although IGA is suitable for the problems which have the higher-order continuity, a higher-order shear deformation theory with C^0 -continuity is used for unification of all chapters. Furthermore, both linear and nonlinear responses for four material models are investigated such as laminated composite plates, piezoelectric laminated composite plates, piezoelectric functionally graded porous plates with graphene platelets reinforcement and functionally graded piezoelectric material porous plates. The control algorithms based on the constant displacement and velocity feedbacks are applied to control linear and geometrically nonlinear static and dynamic responses of the plate, where the effect of the structural damping is considered, based on a closed-loop control with piezoelectric sensors and actuators. The predictions of the proposed approach agree well with analytical solutions and several other available approaches. Through the analysis, numerical results indicated that the proposed method achieves high reliability as compared with other published solutions. Besides, some numerical solutions for PFGPM plates and FG porous reinforced by GPLs may be considered as reference solutions for future work because there have not yet been analytical solutions so far.

CHAPTER 1: LITERATURE REVIEW

1.1 An overview of isogeometric analysis (IGA)

In 2005, Hughes, Cottrell & Bazilevs introduced a new technique, namely Isogeometric Analysis (IGA). The idea behind this technique is that instead of converting one system to another which is quite difficult to perform flawlessly, one should substitute one system for the other so that the conversion is no longer needed. This is accomplished by using the same basis functions that describe geometry in CAD (i.e. B-splines/NURBS) for analysis. Can be seen that in Figure 1.1, the direct interaction is usually impossible, and thus the exact information of the original geometry description is never attained. However, in Figure 1.2, the meshes are therefore exact, and the approximations attain a higher continuity. This technique results in a better collaboration between FEA and CAD. Since the pioneering article, and the IGA book published in 2009, a vast number of researches have been conducted on this subject and successfully applied to many problems ranging from structural analysis, fluid structure interaction electromagnetics and higher-order partial differential equations.

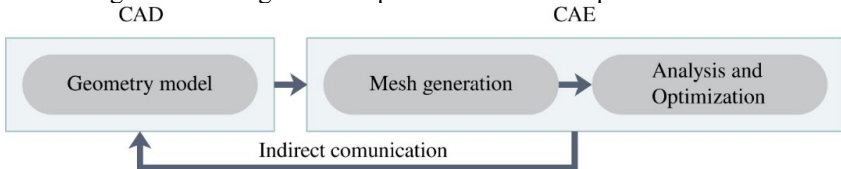


Figure 1.1: Analysis procedure in FEA. Due to the meshing, the computational domain is only an approximation of the CAD object.

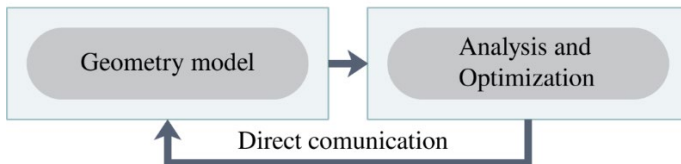


Figure 1.2: Analysis procedure in IGA. No meshing involved, the computational domain is thus kept exactly.

1.2 Literature review about materials which is used in this thesis

In this dissertation, four material types are considered including laminated composite plate, piezoelectric laminated composite plate, piezoelectric functionally graded porous (PFGP) plates reinforced by graphene platelets (GPLs) and functionally graded piezoelectric material porous plate (FGPMP).

1.2.1. Laminated composite plate

Plates – the most famous structures and are an important part of many engineering structures. They are widely used in civil, aerospace engineering,

automotive engineering and many other fields. One of the plate structures commonly used and studied nowadays is laminated composite plates. Laminated composite plates have excellent mechanical properties, including high strength to weight and stiffness to weight ratios, wear resistance, light weight and so on. Besides possessing the superior material properties, the laminated composites also supply the advantageous design through the arrangement of the stacking sequence and layer thickness to obtain the desired characteristics for engineering applications, explaining why they have received considerable attention of many researchers worldwide. Importantly, their effective use depends on the ability of thoroughly elucidate their bending behavior, stress distribution and natural vibrations. Therefore, the study of their static and dynamic responses is really necessary for the above engineering applications.

1.2.2. Piezoelectric laminated composite plate

Piezoelectric material is one of smart material kinds, in which the electrical and mechanical properties have been coupled. One of the key features of the piezoelectric materials is the ability to make the transformation between the electrical power and mechanical power. Accordingly, when a structure embedded in piezoelectric layers is subjected to mechanical loadings, the piezoelectric material can create electricity. On the contrary, the structure can be changed its shape if an electric field is put on. Due to coupling mechanical and electrical properties, the piezoelectric materials have been extensively applied to create smart structures in aerospace, automotive, military, medical and other areas. In the literature of the plate integrated with piezoelectric layers, there are various numerical methods being introduced to predict their behaviors.

1.2.3. Piezoelectric functionally graded porous plates reinforced by graphene platelets (PFGP-GPLs)

The porous materials whose excellent properties such as lightweight, excellent energy absorption, heat resistance have been extensively employed in various fields of engineering including (e.g.) aerospace, automotive, biomedical and other areas. However, the existence of internal pores leads to a significant reduction in the structural stiffness. In order to overcome this shortcoming, the reinforcement with carbonaceous nanofillers such as carbon nanotubes (CNTs) and graphene platelets (GPLs) into the porous materials is an excellent and practical choice to strengthen their mechanical properties.

In recent years, porous materials reinforced by GPLs have been paid much attention to by the researchers due to their superior properties such as lightweight, excellent energy absorption, thermal management. The artificial porous materials such as metal foams which possess combinations of both stimulating physical and mechanical properties have been prevalently applied in lightweight structural materials and biomaterials. The GPLs are dispersed in materials in order to amend the implementation while the weight of structures can be reduced by porosities. With the combination advantages of both GPLs and porosities, the mechanical

properties of the material are significantly recovered but still maintain their potential for lightweight structures. Based on modifying the sizes, the density of the internal pores in different directions, as well as GPL dispersion patterns, the FG porous plates reinforced by GPLs (FGP-GPLs) have been introduced to obtain the required mechanical characteristics.

1.2.4. Functionally graded piezoelectric material porous plates (FGPMP)

Traditional piezoelectric devices are often created from several layers of different piezoelectric materials or the laminated composite plates integrated with piezoelectric sensors and actuators for controlling vibration. Although there are outstanding advantages and wide applications, they still have some shortcomings such as cracking, delamination and stress concentrations at layers' interfaces. As known, the functionally graded materials (FGMs) are some new types of composite structures which have drawn the intensive attention of many researchers in recent years. The material properties of FGMs change uninterruptedly over the thickness of plates by mixing two different materials. So, FGMs will reduce or even remove some disadvantages of piezoelectric laminated composite materials. Based on the FGM concept, the smooth combination of two types of piezoelectric materials in one direction will obtain the functionally graded piezoelectric materials (FGPMs) having many outstanding properties compared with traditional piezoelectric materials. Therefore, FGPMs attract intense attention of researchers for analyzing and designing smart devices in recent years.

1.3 Goal of the thesis

The thesis focuses on the development of isogeometric finite element methods in order to analyze and control the responses of the laminated plate structures. So, there are two main aims to be studied. First of all, a new isogeometric formulation based on Bézier extraction for analysis of the laminated composite plate constructions is presented. Three forms are investigated including static, free vibration and dynamic transient analysis for four types of material plates such as the laminated composite plates, piezoelectric laminated composite plate, piezoelectric functionally graded porous (PFGP) plates reinforced by graphene platelets (GPLs) and functionally graded piezoelectric material porous plates. Secondly, an active control algorithm is applied to control static and transient responses of laminated plates embedded in piezoelectric layers in both linear and nonlinear cases.

1.4. The novelty of thesis

- A generalized unconstrained higher-order shear deformation theory (UHSDT) is given. This theory not only relaxes zero-shear stresses on the top and bottom surfaces of the plates but also gets rid of the need for shear correction factors. It is written in general form of distributed functions. Two distributed functions which supply better solutions than reference ones are suggested.

- The proposed method is based on IGA which is capable of integrating finite element analysis (FEA) into conventional NURBS-based computer aided design (CAD) design tools. This numerical approach is presented in 2005 by Hughes et al. However, there are still interesting topics for further research work.
- IGA has surpassed the standard finite elements in terms of effectiveness and reliability for various engineering problems, especially for ones with complex geometry.
- Instead of using conventional IGA, the IGA based on Bézier extraction is used for all the chapters. The key feature of IGA based on Bézier extraction is to replace the globally defined B-spline/NURBS basis functions by Bernstein shape functions which use the same set of shape functions for each element like as the standard FEM. It allows to easily incorporate into existing finite element codes without adding many changes as the former IGA. This is a new point comparing with the previous dissertations in Viet Nam.
- Until now, there exists still a research gap on the porous plates reinforced by graphene platelets embedded in piezoelectric layers using IGA based on Bézier extraction for both linear and nonlinear analysis. Additionally, the active control technique for control of the static and dynamic responses of this plate type is also addressed.
- In this dissertation, the problems with complex geometries using multipatched approach are also given. This contribution seems different from the previous dissertations which studied IGA in Viet Nam.

1.5. Outline

The thesis contains seven chapters and is planned as follows: **Chapter 1:** Introduction and the historical development of IGA are offered. State of the art development of four material types used in this thesis and the motivation as well as the novelty of the thesis are also clearly described. And, the organization of the thesis is mentioned to the reader for the review of the content of the dissertation. **Chapter 2:** The presentation of isogeometric analysis (IGA) such as the non-uniform rational B-splines (NURBS) basis functions, Bézier extraction and comparisons of isogeometric analysis with finite element method. **Chapter 3:** An overview of plate theories and descriptions of material properties used for the next chapters are given. Firstly, the description of many plate theories including some plate theories to be applied in the chapters. Second, the presentation of four material types in this work including laminated composite plate, piezoelectric laminated composite plate, functionally porous plates reinforced by graphene platelets embedded in piezoelectric layers and functionally graded piezoelectric material porous plates. **Chapter 4:** This is the first chapter of numerical example section. The obtained results for static, free vibration and transient analysis of the laminated composite plate with various geometries, the direction of the reinforcements and boundary conditions are presented. The IGA based on Bézier

extraction is employed for all the chapters. An addition, two piezoelectric layers bonded at the top and bottom surfaces of laminated composite plate are also considered for static, free vibration and dynamic analysis. Then, for the active control of the linear static and dynamic responses, a displacement and velocity feedback control algorithm are performed. The numerical examples in this chapter show the accuracy and reliability of the proposed method. **Chapter 5:** For the first time, an isogeometric Bézier finite element analysis for bending and transient analyses of functionally graded porous (FGP) plates reinforced by graphene platelets (GPLs) embedded in piezoelectric layers, called PFGP-GPLs is given. The effects of weight fractions and dispersion patterns of GPLs, the coefficient and types of porosity distribution, as well as external electric voltages on structure's behaviors, are investigated through several numerical examples. These results, which have not been obtained before, can be considered as reference solutions for future work. In this chapter, our analysis of the nonlinear static and transient responses of PFGP-GPLs is also expanded. Then, a constant displacement and velocity feedback control approaches are adopted to actively control the geometrically nonlinear static as well as the dynamic responses of the plates, where the effect of the structural damping is considered, based on a closed-loop control. **Chapter 6:** To overcome some disadvantages of the laminated plate structure intergraded with piezoelectric layers such as cracking, delamination and stress concentrations at layers' interfaces, in this chapter the functionally graded piezoelectric material porous plates (FGPMP) is introduced. The material characteristics of FG piezoelectric plate differ continuously in the thickness direction through a modified power-law formulation. Two porosity models, even and uneven distributions, are employed. To satisfy Maxwell's equation in the quasi-static approximation, an electric potential field in the form of a mixture of cosine and linear variation is adopted. In addition, several FGPMP plates with curved geometries are furthermore studied, which the analytical solution is unknown. Our further study may be considered as a reference solution for future works. **Chapter 7:** Finally, this chapter presents the concluding remarks and some recommendations for future work.

CHAPTER 2: ISOGEOMETRIC ANALYSIS FRAMEWORK

2.1. Advantages of IGA compared to FEM

Firstly, computation domain stays preserved at any level of domain discretization no matter how coarse it is. In the context of contact mechanics, this leads to the simplification of contact detection at the interface of the two contact surfaces especially in the large deformation circumstance where the relative position of these two surfaces usually changes significantly. In addition, sliding

contact between surfaces can be reproduced precisely and accurately. This is also beneficial for problems that are sensitive to geometric imperfections like shell buckling analysis or boundary layer phenomena in fluid dynamics analysis. Secondly, NURBS based CAD models make the mesh generation step is done automatically without the need for geometry clean-up or feature removal. This can lead to a dramatical reduction in time consumption for meshing and clean-up steps, which account approximately 80% of the total analysis time of a problem. Thirdly, mesh refinement is effortless and less time-consuming without the need to communicate with CAD geometry. This advantage stems from the same basis functions utilized for both modeling and analysis. It can be readily pointed out that the position to partition the geometry and that the mesh refinement of the computational domain is simplified to knot insertion algorithm which is performed automatically. These partitioned segments then become the new elements and the mesh is thus exact. Finally, interelement higher regularity with the maximum of C^{p-1} in the absence of repeated knots makes the method naturally suitable for mechanics problems having higher-order derivatives in formulation such as Kirchhoff-Love shell, gradient elasticity, Cahn-Hilliard equation of phase separation... This results from direct utilization of B-spline/NURBS bases for analysis. In contrast with FEM's basis functions which are defined locally in the element's interior with C^0 continuity across element boundaries (and thus the numerical approximation is C^0), IGA's basis functions are not just located in one element (knot span). Instead, they are usually defined over several contiguous elements which guarantee a greater regularity and interconnectivity and therefore the approximation is highly continuous. Another benefit of this higher smoothness is the greater convergence rate as compared to conventional methods, especially when it is combined with a new type of refinement technique, called k -refinement. Nevertheless, it is worth mentioning that the larger support of basis does not lead to bandwidth increment in the numerical approximation and thus the bandwidth of the resulted sparse matrix is retained as in classical FEM's functions.

2.2. Disadvantages of IGA

This method, however, presents some challenges that require some special treatments.

- The most significant challenge of making use of B-splines/NURBS in IGA is that its tensor product structure does not permit a true local refinement, any knot insertion will lead to global propagation across the computational domain.
- In addition, due to the lack of Kronecker delta property, the application of inhomogeneous Dirichlet boundary condition or exchange of forces/physical data in a coupled analysis are a bit more involved.

- Furthermore, owing to the larger support of the IGA's basis functions, the resulted system matrices are relatively denser (containing more nonzero entries) when compared to FEM and the tri-diagonal band structure is lost as well.

2.3. NURBS basis function

A NURBS curve is obtained by multiplying every control point's component of the control mesh \mathbf{P}_i with an assigned positive scalar weight w_i and the weighting function $W(\xi)$ defined as

$$W(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i, \quad (2.1)$$

which gives

$$\mathbf{C}(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i w_i}{W(\xi)} = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) \mathbf{P}_i, \quad (2.2)$$

where $R_i^p(\xi)$ is the univariate piecewise NURBS basis function defined by

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{W(\xi)}. \quad (2.3)$$

Figure 2.1 demonstrates two circles that are represented by both NURBS and B-spline in the corresponding solid and dotted curves. Their control points are depicted by black balls with the associated weights also given for the NURBS case. It is clear that only the NURBS curve is able to represent the circle exactly.

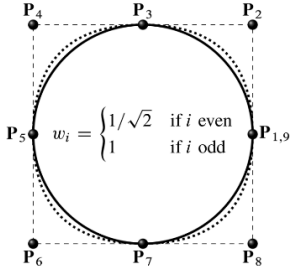


Figure 2.1: Two representations of the circle. The solid curve is created by NURBS which describes exactly the circle while the dotted curve is created by B-splines which is unable to produce an exact circle.

Most properties of B-Splines also hold for NURBS. In case of equal weights $w_i = \text{const}$, $\forall i = 1, \dots, n$ NURBS become B-Splines. Derivatives of NURBS are more involved than those of B-Splines and are addressed in detail in Subsection 2.5.2 in thesis. Some important properties of NURBS are the following:

- For open knot vectors, NURBS basis functions constitute a partition of unity $\sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) = 1, \forall \xi$.
- The continuity and support of NURBS basis functions are the same as for B-splines.
- NURBS are pointwise non-negative
- NURBS can represent precisely a wide class of curves, e.g. conic sections.

The NURBS surface is defined as

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{i,j}, \quad (2.4)$$

where NURBS basis functions in parameter space of two dimensions are defined by

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{W(\xi, \eta)}, \quad (2.5)$$

in which the bivariate weighting function in the denominator is given by

$$W(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}, \quad (2.6)$$

and $w_{i,j}$ is the associated weight to every control point of $m \times n$ control net $\mathbf{P}_{i,j}$.

One of the most conic sections that usually encounter in modeling is the circular plate and it can be described exactly by NURBS surface as illustrated in Figure 2.2. Typically, there are two approaches for parameterizing the same circular NURBS surface at coarse mesh level. The first one is depicted on the left where eighteen control points are used, result in four elements while the second one is shown on the right in which only nine control points are needed that produce only one element. It is worth to mentioning that each parameterization approach suffers from each own singularity. The left one has one singularity at the surface center where nine control points coincide at the same position, and the right one has four singularities at four locations where the four control points $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_7, \mathbf{P}_9$ situate. Usually, in analysis, the right one is preferred due to its nice parameterization. Another conic section that often meets in design is the annular plate which is demonstrated in Figure 2.3. It important to note that this construction way exhibits an internal interface (indicated by the red line) where the first and last control points in the circumferential direction are met. In an analysis, one needs to pay attention to this issue and to figure out a proper way to handle the control variables that associated to these control points.

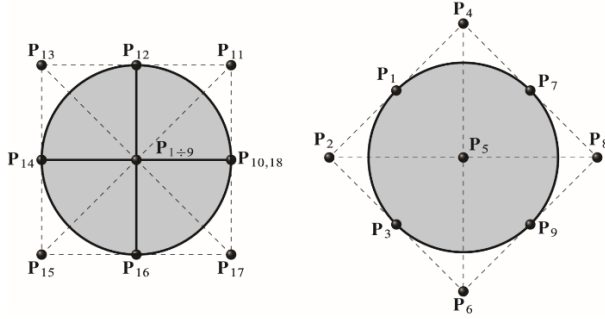


Figure 2.2: Two representations of the same circular plate.

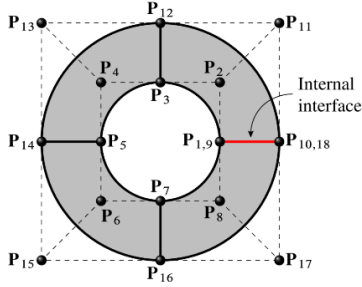


Figure 2.3: A annular plate represented by NURBS surface.

2.4. Bézier extraction

2.4.1. Introduction of Bézier extraction

The native approach for implementing IGA code as described in foregoing sections exhibits several drawbacks that hinder the integration of IGA to existing Finite Element Framework. The apparent hindrance is that following this approach, each element takes some different B-spline basis functions as opposed to FEA where the same basis functions are employed for each element. It can be known that each B-spline curve can be expressed as concatenated C^0 Bézier curves. That means it is possible to transform a B-spline patch into a set of piecewise C^0 Bézier elements and use it as the finite element representation of B-spline or NURBS.

2.4.2. Bézier decomposition and Bézier extraction [97-98]

It follows that the same curve can be described by two equivalent formulas as

$$\mathbf{C}(\xi) = \mathbf{N}^T \mathbf{P} = \mathbf{B}^T \mathbf{P}^b, \quad (2.7)$$

where \mathbf{N}^T and \mathbf{B}^T are vectors of B-spline and Bézier basis functions, respectively with the associated control points stored in the corresponding vector \mathbf{P} and $\bar{\mathbf{P}}$. The procedure to identify individual Bézier curves from a B-spline curve is entitled Bézier decomposition. The Bézier decomposition process is usually

accomplished via knot insertion by additionally inserting already existing knots until their multiplicities equal to polynomial order and so that the continuities between them are C^0 .

Given a knot vector $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ and a collection of control points

$\mathbf{P} = \{\mathbf{P}_i\}_{i=1}^n$ which determine a B-spline curve. By applying the knot insertion to a set of knots $\{\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_j, \dots, \bar{\xi}_m\}$ that needs to be replicated to produce the Bézier decomposition from a B-spline curve, one can write

$$\bar{\mathbf{P}}^{j+1} = (\mathbf{C}^j)^T \bar{\mathbf{P}}^j, \quad (2.8)$$

where $\bar{\mathbf{P}}^1 = \mathbf{P}$. Eq. (2. 8) obtained when inserting a single knot $\bar{\xi}_j, j = 1, 2, \dots, m$ to the original knot vector which the matrix. \mathbf{C}^j is defined as

$$\mathbf{C}^j = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1-\alpha_2 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1-\alpha_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 1-\alpha_4 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & & & 0 & \alpha_{(n+j-1)} & 1-\alpha_{(n+j)} \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

in which $\alpha_i^j, i = 1, 2, \dots, n + j$ be the i -th alpha. By performing the transformation defined in Eq. (2. 9) for every inserted knot $\bar{\xi}_j$, at the final control points collection $\bar{\mathbf{P}}^{m+1}$ which defined the Bézier segments of the decomposition. Setting $\mathbf{P}^b = \bar{\mathbf{P}}^{m+1}$, follow by defining $\mathbf{C}^T = (\mathbf{C}^m)^T (\mathbf{C}^{m-1})^T \dots (\mathbf{C}^1)^T$, it can be obtained

$$\underbrace{\mathbf{P}^b}_{(n+m) \times d} = \underbrace{\mathbf{C}^T}_{n \times (n+m)} \underbrace{\mathbf{P}}_{n \times d}, \quad (2.10)$$

which are convex linear combinations of the control points of the B-spline curve, \mathbf{P} and \mathbf{C} is a matrix of so-called *Bézier extraction operator* which rows adding up to unity due to the convex combinations. It is also worthwhile to mention that the information required to construct matrix \mathbf{C} is solely a knot vector, that means the operator holds for both B-splines and NURBS. By combining the two Eqs. (2. 7) and (2. 10), the formulation that relates B-spine basis functions and Bernstein basis functions reads as follows

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{N}^T \mathbf{P} &= \mathbf{B}^T \mathbf{P}^b \\ \mathbf{P}^b &= \mathbf{C}^T \mathbf{P} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{N}^T \mathbf{P} = \mathbf{B}^T \mathbf{C}^T \mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{N} = \mathbf{C} \mathbf{B}. \quad (2. 11)$$

Thus, the B-Spline basis functions can be obtained by multiplying the same matrix \mathbf{C} with the Bézier basis functions (the Bernstein basis). By the advantage of this

approach, the incorporation of IGA to an existing FEA code is simplified to implement an element that utilizes the Bernstein basis and has an entry to load Bézier extraction matrix \mathbf{C} . For NURBS, the procedure of applying extraction operator is done as follows.

The formula of weighting functions defined in Eq.(2. 1) can be rewritten in matrix form as

$$W(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i = \mathbf{N}^T \mathbf{w} = (\mathbf{CB})^T \mathbf{w} = \mathbf{B}^T \mathbf{C}^T \mathbf{w} = \mathbf{B}^T \mathbf{w}^b = W^b, \quad (2.12)$$

where $\mathbf{w}^b = \mathbf{C}^T \mathbf{w}$ are the corresponding weights of the Bernstein basis functions. Now, writing Eq. (2. 3) in matrix form as follow

$$\mathbf{R}(\xi) = \frac{1}{W(\xi)} \mathbf{W} \mathbf{N}(\xi), \quad (2.13)$$

in which \mathbf{W} is the diagonal matrix of control points' weights defined as

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_n \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Replacing matrix \mathbf{N} in Eq. (2. 13) by the relation in Eq. (2. 11) yields the formula that expresses NURBS basis in terms of Bernstein basis as

$$\mathbf{R}(\xi) = \frac{1}{W(\xi)} \mathbf{W} \mathbf{C} \mathbf{B}(\xi). \quad (2.15)$$

The relationship between the NURBS control points, \mathbf{P} , and the Bézier control points, \mathbf{P}^b is defined as

$$\mathbf{P}^b = (\mathbf{W}^b)^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{W} \mathbf{P}, \quad (2.16)$$

where \mathbf{W}^b is the diagonal matrix form of the Bézier weights recast from the vector form \mathbf{w}^b as

$$\mathbf{W}^b = \begin{bmatrix} w_1^b & & & \\ & w_2^b & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_{n+m}^b \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

For higher-dimension bases, the extraction operators are straightforwardly defined as the tensor product of the univariate ones.

CHAPTER 3: THEORETICAL BASIS

3.1. The generalized unconstrained higher-order shear deformation theory (UHSDT)

It can be seen that TSDT contains a cubic-variation of in-plane displacements constrained by the transverse displacement and the rotations. Furthermore, the TSDT assumes that transverse shear stresses vanish on the top and bottom of the plate, which is not entirely accurate. While attempting to solve the problem of shear traction parallel to the surface of plates, Leung proposed an unconstrained third-order shear deformation theory (UTSDT). Additionally, UTSDT is also feasible for problems involving contact friction or a flow field. Different from the traction-free boundary condition on the top and bottom plate surfaces presented in TSDT of Reddy, this theory allows a finite transverse shear strain on the lower and upper surface of the plate. Although the governing differential equations of UTSDT have a complexity similar to those of TSDT, UTSDT's solutions are more accurate than the TSDT ones compared with the 3D exact solution. The unconstrained third-order shear deformation theory includes seven displacement components, i.e. six in-plane displacements and one transverse displacement.

This thesis contributes an arbitrary novel unconstrained higher-order shear deformation theory (UHSDT) which is used for calculation in chapter 4. Although UHSDT also adopts seven displacement components similar to those of UTSDT, higher-order rotations depend on an arbitrary function $f(z)$ through the plate thickness. In UTSDT [118], the third-order function ($f(z) = z^3$) is used. It can be observed that the profile of the shear stresses through the plate thickness depends on various features such as the number of layers, layer thickness and material properties. Hence, an arbitrary unconstrained higher-order shear deformation theory (UHSDT) can be generalized such that it reflects well nonlinear behavior through the plate thickness and can provide better solutions than UTSDT. This motivates us to investigate an unconstrained higher-order shear deformation theory (UHSDT).

The unconstrained theory based on HSDT can be rewritten in a general form using an arbitrary function $f(z)$ as follows:

$$\begin{aligned}u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + zu_1(x, y, t) + f(z)u_2(x, y, t) \\v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + zv_1(x, y, t) + f(z)v_2(x, y, t) \\w(x, y, z, t) &= w(x, y, t)\end{aligned}\quad (3.1)$$

where $u_0(x, y, t)$, $v_0(x, y, t)$, $u_1(x, y, t)$, $v_1(x, y, t)$, $u_2(x, y, t)$, $v_2(x, y, t)$

and $w(x, y, t)$ are seven displacement variables which must be determined.

Accordingly, two newly proposed shape functions and shape functions of UTSDT are introduced, as shown in Table 3.1, where $f(z)$ is the inverse tangent distributed function through the plate thickness.

Table 3.1: Three used forms of distributed functions and their derivatives

Model	$f(z)$	$f'(z)$
Leung [120]	z^3	$3z^2$
Model 1	$\arctan(z)$	$\frac{1}{1+z^2}$
Model 2	$\sin(z)$	$\cos(z)$

3.2. The C^0 -type higher-order shear deformation theory (C^0 -type HSDT)

The above-mentioned theories require C^0 -continuity and C^1 -continuity of the approximate field or the generalized displacement field. The HSDT and the CPT bear the relationship to derivation transverse displacement also called slope components. In some numerical methods, it is often difficult to enforce boundary conditions for slope components due to the unification of the approximation variables. Therefore, a C^0 -type HSDT is rather recommended.

In this thesis, the authors promote a C^0 -type HSDT for electro-mechanical vibration responses of plates made of functionally graded piezoelectric materials with the presence of porosities shown in chapter 6. This C^0 -type HSDT contributes to increasing the novelty of the dissertation.

According to the generalized HSDT, the displacement field of any points in the plate has five unknowns and can be rewritten by:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}^1(x, y, t) + z\mathbf{u}^2(x, y, t) + f(z)\mathbf{u}^3(x, y, t) \quad (3.2)$$

where

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{u}^1 = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{u}^2 = -\begin{Bmatrix} w_{0,x} \\ w_{0,y} \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{u}^3 = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

in which u_0, v_0, w_0, θ_x and θ_y are the in-plane, transverse displacements and the rotation components in the y - z , x - z planes, respectively; the symbols ‘ ${}_x$ ’ and ‘ ${}_y$ ’ denote derivative of any function with respect to x and y directions, respectively. To avoid the order of high-order derivation in approximate formulations and easily apply boundary conditions similar to the standard finite element procedure, additional assumptions are made as follows:

$$w_{0,x} = \beta_x; \quad w_{0,y} = \beta_y \quad (3.4)$$

Substituting Eq. (3.4) to Eq.(3.3), it can be written:

$$\mathbf{u}^1 = \{u_0 \quad v_0 \quad w_0\}^T; \quad \mathbf{u}^2 = -\{\beta_x \quad \beta_y \quad 0\}^T; \quad \mathbf{u}^3 = \{\theta_x \quad \theta_y \quad 0\}^T \quad (3.5)$$

From Eq. (3. 5), it can be seen that the compatible strain fields only request C^0 -continuity. This theory is named the C^0 -type higher-order shear deformation theory.

Based on the C^0 -type higher-order shear deformation theory, the bending and shear strains are expressed by:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy} \right\}^T &= \boldsymbol{\varepsilon}^0 + z\boldsymbol{\varepsilon}^1 + f(z)\boldsymbol{\varepsilon}^2; \\ \boldsymbol{\gamma} = \left\{ \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \right\}^T &= \boldsymbol{\varepsilon}^{s0} + f'(z)\boldsymbol{\varepsilon}^{s1}\end{aligned}\quad (3.6)$$

where

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^0 &= \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^1 = - \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^2 = \begin{Bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{Bmatrix} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{s0} &= \begin{Bmatrix} w_{0,x} - \beta_x \\ w_{0,y} - \beta_y \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{s1} = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (3.7)$$

in which $f'(z)$ is the derivation of the function $f(z)$ which is chosen later.

3.3. Constitutive equations of laminated composite plate

The generalized Hooke's law for an anisotropic material is expressed by:

$$\sigma_i = Q_{ij}\varepsilon_j \quad (3.8)$$

where σ_i are the stress components, ε_j are the strain components and Q_{ij} are the “reduced” material coefficients for 2D problem with i, j refer to the components of an orthogonal Cartesian coordinate (x_1, x_2, x_3) . In general, Q_{ij} have 21 independent elastic constants. For orthotropic materials, the number of material parameters is reduced to 9 in three-dimensional cases. Figure 3.1 illustrates the material coordinate system (x_1, x_2, x_3) , in which the material coordinate axis x_1 is taken to be parallel or coincide to the fiber, the x_2 -axis transverse to the fiber direction in the plane of the lamina, and the x_3 -axis is perpendicular to the plane of the lamina.

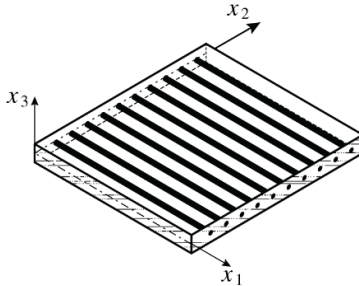


Figure 3. 1. Configuration of a lamina and laminated composite plate.
Using rule of mixture, the lamina constants are defined as follows

$$\begin{aligned} E_1 &= E_f \nu_f + E_m \nu_m & ; \quad \nu_{12} &= \nu_f \nu_f + \nu_m \nu_m \\ E_2 &= \frac{E_f E_m}{E_f \nu_m + E_m \nu_f} & ; \quad G_{12} &= \frac{G_f G_m}{G_f \nu_m + G_m \nu_f} \end{aligned} \quad (3.9)$$

where $E_f, E_m; \nu_f, \nu_m; \nu_f, \nu_m$ and G_f, G_m are Young's moduli, Poisson's ratios, volume fractions and the shear modulus, respectively, in which f and m refer to fiber and matrix of laminated composites, respectively. Besides, G_f, G_m are calculated by:

$$G_f = \frac{E_f}{2(1+\nu_f)} \quad ; \quad G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \quad (3.10)$$

By neglecting σ_z for each orthotropic layer, the constitutive equation of k^{th} layer in the local coordinate system derived from Hooke's law for a plane stress is given by

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^k \\ \sigma_2^k \\ \tau_{12}^k \\ \tau_{13}^k \\ \tau_{23}^k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & Q_{54} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45} & Q_{44} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^k \\ \varepsilon_2^k \\ \gamma_{12}^k \\ \gamma_{13}^k \\ \gamma_{23}^k \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

in which reduced stiffness components, Q_{ij}^k , are expressed by

$$\begin{aligned} Q_{11}^k &= \frac{E_1^k}{1-\nu_{12}^k \nu_{21}^k}; \quad Q_{12}^k = \frac{\nu_{12}^k E_2^k}{1-\nu_{12}^k \nu_{21}^k}; \quad Q_{22}^k = \frac{E_2^k}{1-\nu_{12}^k \nu_{21}^k}; \quad Q_{66}^k = G_{12}^k; \\ Q_{55}^k &= G_{13}^k; \quad Q_{44}^k = G_{23}^k \end{aligned} \quad (3.12)$$

The stress - strain relationship in the global reference system (x,y,z) is computed by

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^k \\ \sigma_{yy}^k \\ \tau_{xy}^k \\ \tau_{xz}^k \\ \tau_{yz}^k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} & \bar{Q}_{54} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{44} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^k \\ \varepsilon_{yy}^k \\ \gamma_{xy}^k \\ \gamma_{xz}^k \\ \gamma_{yz}^k \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

where \bar{Q}_{ij}^k is the transformed material constant matrix and is written in detail as:

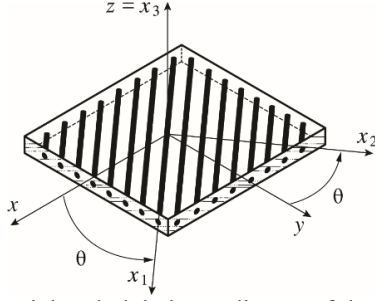


Figure 3. 2. Material and global coordinates of the composite plate.

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta \\
 \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta \\
 \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
 \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta \\
 \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \sin \theta \cos \theta \\
 \bar{Q}_{55} &= Q_{55} \cos^2 \theta + Q_{44} \sin^2 \theta
 \end{aligned}$$

Local and global coordinates of the laminated composite is shown in Figure 3.2.

3.4. Piezoelectric material

The linear piezoelectric constitutive equations can be expressed as follows:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & -\mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & \mathbf{g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

where $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ and $\boldsymbol{\sigma}$ are the strain vector and the stress vector, respectively; \mathbf{c} denotes the elastic constant matrix. The electric field vector \mathbf{E} , can be defined as

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\phi = -\nabla\phi \tag{3.16}$$

Note that, for the type of piezoelectric materials considered in this work the stress piezoelectric constant matrices \mathbf{e} , the strain piezoelectric constant matrices \mathbf{d} and the dielectric constant matrices \mathbf{g} can be written as follows

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (3.17)$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \end{bmatrix}$$

3.5. Piezoelectric functionally graded porous plates reinforced by graphene platelets (PFGP-GPLs)

In this study, a plate model like a sandwich plate with length a , width b and total thickness of $h = h_c + 2h_p$ in which h_c and h_p are the thicknesses of the porous layer which is called core and the piezoelectric face layers, respectively, is shown in Figure 3.3.

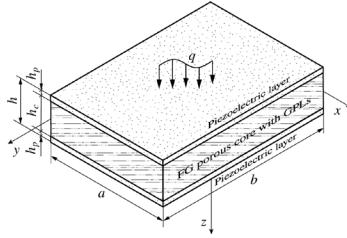
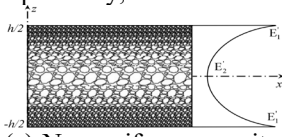
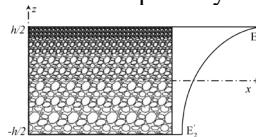


Figure 3.3. Configuration of a piezoelectric FG porous plate reinforced by GPLs.

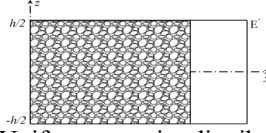
Three different porosity distribution types along the thickness direction of plates including two types of non-uniformly symmetric and a uniform are illustrated in Figure 3.4. In addition, three GPL dispersion patterns shown in Figure 3.5 are investigated for each porosity distribution. In each pattern, the GPL volume fraction V_{GPL} is assumed to vary smoothly along the thickness direction. As can be seen in Figure 3.5, E'_1 and E'_2 denote the maximum and minimum Young's moduli of the non-uniformly distributed porous material without GPLs, respectively, while E' is Young's modulus of uniform porosity distribution.



(a) Non-uniform porosity distribution 1



(b) Non-uniform porosity distribution 2



(c) Uniform porosity distribution

Figure 3. 4. Porosity distribution types

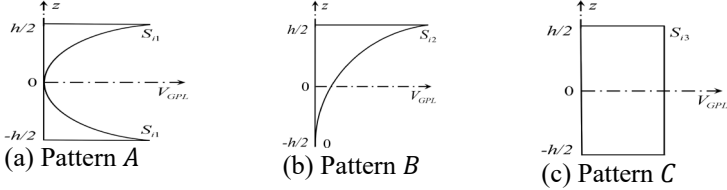


Figure 3. 5. Three dispersion patterns A, B and C of the GPLs for each porosity distribution type.

The material properties including Young's moduli $E(z)$, shear modulus $G(z)$ and mass density $\rho(z)$ which alter along the thickness direction for different porosity distribution types can be expressed as

$$\begin{cases} E(z) = E_1 [1 - e_0 \lambda(z)], \\ G(z) = E(z) / [2(1 + \nu(z))], \\ \rho(z) = \rho_1 [1 - e_m \lambda(z)], \end{cases} \quad (3.18)$$

where

$$\lambda(z) = \begin{cases} \cos(\pi z / h_c), & \text{Non-uniform porosity distribution 1} \\ \cos(\pi z / 2h_c + \pi / 4), & \text{Non-uniform porosity distribution 2} \\ \lambda, & \text{Uniform porosity distribution} \end{cases} \quad (3.19)$$

in which $E_1 = E'_1$ and $E_1 = E'$ for types of non-uniformly and uniform porosity distribution, respectively. ρ_1 denotes the maximum value of mass density of the porous core. The coefficient of porosity e_0 can be determined by

$$e_0 = 1 - E'_2 / E'_1 \quad (3.20)$$

Through Gaussian Random Field (GRF) scheme, the mechanical characteristic of closed-cell cellular solids is given as

$$\frac{E(z)}{E_1} = \left(\frac{\rho(z) / \rho_1 + 0.121}{1.121} \right)^{2.3} \quad \text{for} \left(0.15 < \frac{\rho(z)}{\rho_1} < 1 \right) \quad (3.21)$$

Then, the coefficient of mass density e_m in Eq. (3.24) is possibly stated as

$$e_m = \frac{1.121 \left(1 - 2.3 \sqrt[2.3]{1 - e_0 \lambda(z)} \right)}{\lambda(z)} \quad (3.22)$$

Also according to the closed-cell GRF scheme [128], Poisson's ratio $\nu(z)$ is derived as

$$\nu(z) = 0.221p' + \nu_1(0.342p'^2 - 1.21p' + 1), \quad (3.23)$$

in which ν_1 represents the Poisson's ratio of the metal matrix without internal pores and p' is given as

$$p' = 1.121 \left(1 - 2.3\sqrt{1 - e_0\lambda(z)} \right) \quad (3.24)$$

It should be noted that to obtain a meaningful and fair comparison, the mass per unit of surface M of the FG porous plates with different porosity distributions is set to be equivalent and can be calculated by

$$M = \int_{-h_c/2}^{h_c/2} \rho(z) dz \quad (3.25)$$

Then, the coefficient λ in Eq. (3.18) for uniform porosity distribution can be defined as

$$\lambda = \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0} \left(\frac{M / \rho_1 h + 0.121}{0.121} \right)^{2.3} \quad (3.26)$$

The volume fraction of GPLs alters along the thickness of the plate for three dispersion patterns depicted in Figure 3.5 can be given as

$$V_{GPL} = \begin{cases} S_{i1} [1 - \cos(\pi z / h_c)], & \text{Pattern A} \\ S_{i2} [1 - \cos(\pi z / 2h_c + \pi / 4)], & \text{Pattern B} \\ S_{i3}, & \text{Pattern C} \end{cases} \quad (3.27)$$

where S_{i1} , S_{i2} and S_{i3} are the maximum values of GPL volume fraction and $i = 1, 2, 3$ corresponds to two non-uniform porosity distributions 1, 2 and the uniform distribution, respectively.

The relationship between the volume fraction V_{GPL} and weight fractions Λ_{GPL} is given by

$$\frac{\Lambda_{GPL} \rho_m}{\Lambda_{GPL} \rho_m + \rho_{GPL} - \Lambda_{GPL} \rho_{GPL}} \int_{-h_c/2}^{h_c/2} [1 - e_m \lambda(z)] dz = \int_{-h_c/2}^{h_c/2} V_{GPL} [1 - e_m \lambda(z)] dz. \quad (3.28)$$

By the Halpin-Tsai micromechanical model [129-131], Young's modulus E_1 is determined as

$$E_1 = \frac{3}{8} \left(\frac{1 + \zeta_L \eta_L V_{GPL}}{1 - \eta_L V_{GPL}} \right) E_m + \frac{5}{8} \left(\frac{1 + \zeta_w \eta_w V_{GPL}}{1 - \eta_w V_{GPL}} \right) E_m, \quad (3.29)$$

in which

$$\zeta_L = \frac{2l_{GPL}}{t_{GPL}}, \quad \zeta_w = \frac{2w_{GPL}}{t_{GPL}}, \quad \eta_L = \frac{(E_{GPL}/E_m)-1}{(E_{GPL}/E_m)+\zeta_L}, \quad (3.30)$$

$$\eta_w = \frac{(E_{GPL}/E_m)-1}{(E_{GPL}/E_m)+\zeta_w},$$

where w_{GPL} , l_{GPL} and t_{GPL} denote the average width, length and thickness of GPLs, respectively; E_{GPL} and E_m are Young's moduli of GPLs and metal matrix, respectively. Then, the mass density ρ_1 can be determined and Poisson's ratio ν_1 of the GPLs reinforced for porous metal matrix according to the rule of mixture as

$$\rho_1 = \rho_{GPL}V_{GPL} + \rho_mV_m, \quad (3.31)$$

$$\nu_1 = \nu_{GPL}V_{GPL} + \nu_mV_m \quad (3.32)$$

where ρ_{GPL} , ν_{GPL} and V_{GPL} are the mass density, Poisson's ratio and volume fraction of GPLs, respectively; while ρ_m , ν_m and $V_m = 1 - V_{GPL}$ represent the mass density, Poisson's ratio and volume fraction of metal matrix, respectively.

3.6 Functionally graded piezoelectric material porous plates (FGPMP)

A FGPMP plate with the length a , the width b and the thickness h is considered. The plate is made of a mixture of PZT-4 and PZT-5H materials subjected to an electric potential $\Phi(x, y, z, t)$ as shown in Figure 3.5, in which the full PZT-4 and PZT-5H surfaces are distributed at the top ($z = h/2$) and bottom ($z = -h/2$) plates, respectively. Two types of FG piezoelectric porous plates consisting of FGPMP-I and FGPMP-II are considered in this study. For a type of even distribution, FGPMP-I, the effective material properties of piezoelectric porous plates through the thickness direction are computed by a modified power-law model:

$$c_{ij}(z) = (c_{ij}^u - c_{ij}^l) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^g + c_{ij}^l - \frac{\alpha}{2} (c_{ij}^u + c_{ij}^l);$$

$$(i, j) = \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,3), (5,5), (6,6)\}$$

$$e_{ij}(z) = (e_{ij}^u - e_{ij}^l) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^g + e_{ij}^l - \frac{\alpha}{2} (e_{ij}^u + e_{ij}^l); \quad (i, j) = \{(3,1), (3,3), (3,5)\} \quad (3.33)$$

$$k_{ij}(z) = (k_{ij}^u - k_{ij}^l) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^g + k_{ij}^l - \frac{\alpha}{2} (k_{ij}^u + k_{ij}^l); \quad (i, j) = \{(1,1), (3,3)\}$$

$$\rho(z) = (\rho^u - \rho^l) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^g + \rho^l - \frac{\alpha}{2} (\rho^u + \rho^l)$$

where c_{ij} , e_{ij} and k_{ij} are defined as above, g is the power index that represents the material distribution across the plate thickness, ρ is the material density; the symbols u and l denote the material properties of the upper and lower surfaces, respectively, and α is the porosity volume fraction.

Type of uneven distribution, FGPMP-II, the porosities are concentrated around the cross-section middle-surface and the amount of porosity discharges at the top and bottom of the cross-section. In this case, the effective material properties are computed by:

$$\begin{aligned}
 c_{ij}(z) &= (c_{ij}^u - c_{ij}^l) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^g + c_{ij}^l - \frac{\alpha}{2} (c_{ij}^u + c_{ij}^l) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right); \\
 (i, j) &= \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,3), (5,5), (6,6)\} \\
 e_{ij}(z) &= (e_{ij}^u - e_{ij}^l) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^g + e_{ij}^l - \frac{\alpha}{2} (e_{ij}^u + e_{ij}^l) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right); \\
 (i, j) &= \{(3,1), (3,3), (3,5)\} \\
 k_{ij}(z) &= (k_{ij}^u - k_{ij}^l) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^g + k_{ij}^l - \frac{\alpha}{2} (k_{ij}^u + k_{ij}^l) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right); \\
 (i, j) &= \{(1,1), (3,3)\} \\
 \rho(z) &= (\rho^u - \rho^l) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^g + \rho^l - \frac{\alpha}{2} (\rho^u + \rho^l) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right)
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

To show the influence of porosity volume fraction on material properties, the variation of elastic coefficient c_{11} of FGPMP plate which is made of PZT-4/PZT-5H versus the thickness with various power index values as depicted in Figure 3. 5 is illustrated. It can be seen that the elastic coefficient of perfect FGPM, $\alpha = 0$, is continuous through the top surface (PZT-4 rich) to the bottom

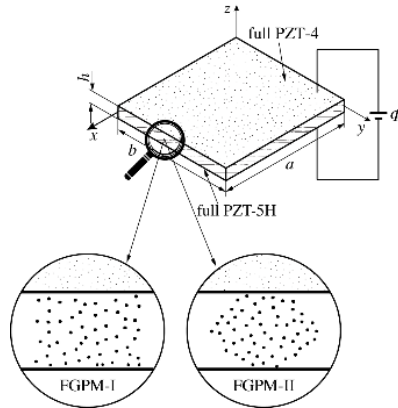
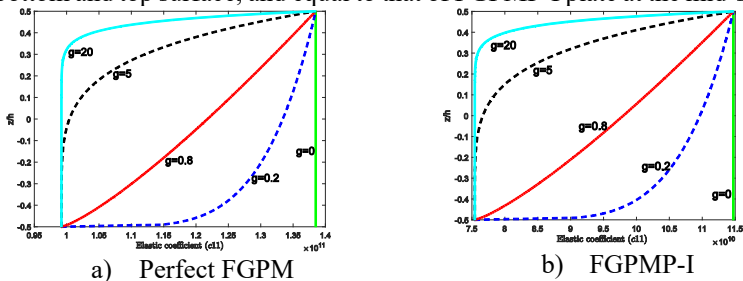


Figure 3.5. Geometry and cross sections of FGPMP plates.

surface (PZT-5H rich) as shown in Figure 3.6a. As $g = 0$, the elastic coefficient is constant through the plate thickness. The profiles of c_{11} are also plotted in Figure 3.6b and Figure 3.6c for porous FGPM-I and FGPM-II, respectively. As seen, there has the same profile for the perfect FGPM and FGPM-I type with porosities. However, the magnitude of the elastic coefficient of porous FGPM-I is lower than that of perfect FGPM. Therefore, the stiffness of the FGPMP is decreased with the presence of the porous parameter. Moreover, when the porosities are distributed around the cross section mid-zone, FGPM-II type, the elastic coefficient is maximum on the bottom and top surface and decreases towards middle zone direction as indicated in Figure 3.6c. Figure 3.6d displays the influence of porosities on the elastic coefficient. It is found that the elastic coefficient's amplitude of FGPM-I plate is equal to that of perfect FGPM on the bottom and top surface, and equal to that of FGPM-I plate at the mid-surface.



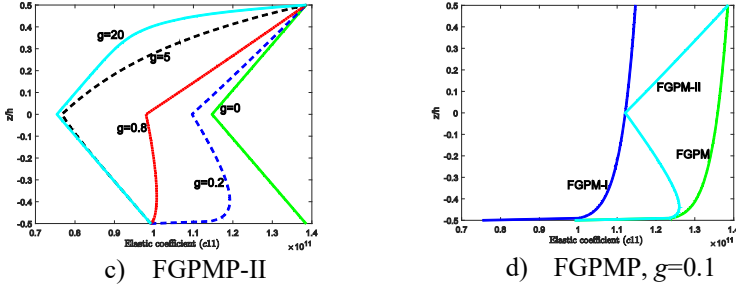


Figure 3.6. Variation of elastic coefficient c_{11} of FGPM plate made of PZT-4/PZT-5H with $\alpha = 0.2$.

CHAPTER 4: ANALYZE AND CONTROL THE RESPONSES OF PIEZOELECTRIC LAMINATED COMPOSITE PLATES

4.1 Overview

In this chapter, the objective of the dissertation is performed. An isogeometric finite element formulation based on Bézier extraction for the non-uniform rational B-splines (NURBS) in combination with a generalized unconstrained higher-order shear deformation theory (UHSDT) presented in 3.1 section for analysis of static, free vibration and transient responses of plates. Two types of plate including the laminated composite plates and the piezoelectric laminated composite plates are studied in this chapter. In addition, for the piezoelectric laminated composite plates, the active response control of structures is investigated. The displacement field is approximated according to the proposed model and the linear transient formulation for plates is solved by Newmark time integration. The presented method relaxes zero-shear stresses at the top and bottom surfaces of the plates and no shear correction factors are used. NURBS can be written in terms of Bernstein polynomials and the Bézier extraction operator as section 2.3. Through the thickness of each piezoelectric layer, the electric potential variation is considered linear. A closed-loop system is used for active control of the piezoelectric laminated composite plates. The accuracy and reliability of the proposed method are verified by comparing its numerical predictions with those of other available numerical approaches.

4.2. Weak form for laminated composite plates

The unconstrained theory based on HSDT can be rewritten as follows:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z u_1(x, y, t) + f(z) u_2(x, y, t) \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z v_1(x, y, t) + f(z) v_2(x, y, t) \\
 w(x, y, z, t) &= w(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Here model 1 with $f(z) = \arctan(z)$ is used. So, generalized unconstrained higher-order shear deformation theory (UHSDT) can be called unconstrained inverse trigonometric shear deformation theory (UITSDT).

The in-plane strain vector $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ is thus expressed by the following equation

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \gamma_{xy}]^T = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + z\boldsymbol{\varepsilon}_1 + f(z)\boldsymbol{\varepsilon}_2 \quad (4.2)$$

and the transverse shear strain vector $\boldsymbol{\gamma}$ has the following form

$$\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_{xz} \ \gamma_{yz}]^T = \boldsymbol{\varepsilon}_0^s + f'(z)\boldsymbol{\varepsilon}_1^s \quad (4.3)$$

where $f'(z)$ is derivative of $f(z)$ function and

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ v_{0,x} + u_{0,y} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} u_{1,x} \\ v_{1,y} \\ v_{1,x} + u_{1,y} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} u_{2,x} \\ v_{2,y} \\ v_{2,x} + u_{2,y} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_0^s = \begin{bmatrix} u_1 + w_{,x} \\ v_1 + w_{,y} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1^s = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

A weak form of the static model for the plates under transverse loading q_0 can be written as

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^T \bar{\mathbf{D}} \boldsymbol{\varepsilon}_p d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\gamma}^T \bar{\mathbf{D}}_s \boldsymbol{\gamma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta w q_0 d\Omega \quad (4.5)$$

where q_0 is the transverse loading per unit area.

From Hooke's law and the linear strains given by Eqs.(4. 2) and (4. 3), the stress is computed by

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_p \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{D}}_s \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_p \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{c} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.6)$$

where $\boldsymbol{\sigma}_p$ and $\boldsymbol{\tau}$ are the in-plane stress component and shear stress; $\bar{\mathbf{D}}$ and $\bar{\mathbf{D}}_s$ are material constant matrices given in the form of

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{D}}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{B}_s \\ \mathbf{B}_s & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

in which

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \bar{Q}_{ij} dz; \quad (4.8)$$

$$i, j = 1, 2, 6$$

$$(A_s^{ij}, B_s^{ij}, D_s^{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} [1, f'(z), (f'(z))^2] \bar{Q}_{ij} dz; \quad i, j = 4, 5$$

where \bar{Q}_{ij} is the transformed material constant.

For forced vibration analysis of the plates, a weak form can be derived from the following undamped dynamic equilibrium equation as follows:

$$\int_{\Omega} \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_p^T \bar{\mathbf{D}} \boldsymbol{\epsilon}_p d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\gamma}^T \bar{\mathbf{D}}_s \boldsymbol{\gamma} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} d\Omega = \int_{\Omega} \delta w q(x, y, t) d\Omega \quad (4. 9)$$

where the mass matrix \mathbf{m} is calculated in a consistent form as follows

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & I_4 \\ I_2 & I_3 & I_5 \\ I_4 & I_5 & I_6 \end{bmatrix}, (I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho (1, z, z^2, zf(z), zf(z), f^2(z)) dz \quad (4. 10)$$

in which ρ is the mass density,

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{Bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w \end{Bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \mathbf{u}_3 = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4. 11)$$

and $q(x, y, t)$ is the transverse loading per unit area which is the function depending on time and space.

It should be noted that no external forces are required in the free vibration problems, and the terms on the right-hand side of Eq.(4. 9) is thus equivalent to zero.

4.3. Approximated formulation based on Bézier extraction for NURBS

By using the Bézier extraction for NURBS, the displacement field \mathbf{u} of the plate is approximated as follows

$$\mathbf{u}^h(\xi, \eta) = \sum_A^{m \times n} R_A^e(\xi, \eta) \mathbf{q}_A \quad (4. 12)$$

where $n \times m$ is the number of basis functions, and $\mathbf{x}^T = (x \ y)$ is the physical coordinate vector.

In Eq.(4. 12), $R_A^e(\xi, \eta)$ is a NURBS basis function for two-dimensional problems which is written in form of the linear combination of Bézier extraction operator and Bernstein polynomials, \mathbf{P}_A is the control point A and $\mathbf{q}_A = [u_{0,A} \ v_{0,A} \ u_{1,A} \ v_{1,A} \ u_{2,A} \ v_{2,A} \ w_A]^T$ is the vector of nodal degrees of freedom associated with control point A .

By substituting Eq. (4. 12) with Eq.(4. 2), the in-plane and shear strains can be rewritten as

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_p & \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix}^T = \sum_{A=1}^{m \times n} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_A^m & \mathbf{B}_A^{b1} & \mathbf{B}_A^{b2} & \mathbf{B}_A^{s_1} & \mathbf{B}_A^{s_2} \end{bmatrix}^T \mathbf{q}_A \quad (4. 13)$$

in which

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_A^m &= \begin{bmatrix} R_{A,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{A,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_{A,y} & R_{A,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_A^{b1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{A,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{A,y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{A,y} & R_{A,x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_A^{b2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & R_{A,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{A,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{A,y} & R_{A,x} & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_A^{s1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_A & 0 & 0 & 0 & R_{A,x} \\ 0 & 0 & 0 & R_A & 0 & 0 & R_{A,y} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_A^{s2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & R_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_A & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

By substituting Eq. (4.13) with Eq.(4.5), the formulation of static analysis is obtained in the following form

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \tag{4.15}$$

where the global stiffness matrix \mathbf{K} is given by

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{B}^m \\ \mathbf{B}^{b1} \\ \mathbf{B}^{b2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^m \\ \mathbf{B}^{b1} \\ \mathbf{B}^{b2} \end{bmatrix} \right\} + \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{s1} \\ \mathbf{B}^{s2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{B}_s \\ \mathbf{B}_s & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{s1} \\ \mathbf{B}^{s2} \end{bmatrix} \right\} d\Omega \tag{4.16}$$

and the load vector \mathbf{F} is calculated as

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} q_0 \mathbf{R}_0 d\Omega \tag{4.17}$$

in which

$$\mathbf{R}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ R_A] \tag{4.18}$$

For free vibration analysis, one has

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{4.19}$$

where the global mass matrix \mathbf{M} is described as

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0 \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & I_4 \\ I_2 & I_3 & I_5 \\ I_4 & I_5 & I_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0 \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \right\} d\Omega \tag{4.20}$$

with

$$\mathbf{N}_0 = \begin{bmatrix} R_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_A \end{bmatrix}; \tag{4.21}$$

$$\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & R_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

And for forced vibration analysis, undamped dynamic discrete equations can be expressed from Eq.(4. 9)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}(t) \quad (4. 22)$$

To solve this second order time-dependent problem, several methods have been proposed such as Wilson, Newmark, Houbolt, Crank-Nicholson, etc. Here, Eq.(4. 22) is solved by the Newmark direct integration scheme.

4.4. Approximated formulation of electric potential field

To approximate the electric potential field, each thin piezoelectric layer is discretized into a lot of finite sublayers through the thickness dimension. Besides, the electric potential variation is assumed to be linear in each sublayer and is approximated throughout the piezoelectric layer thickness as follows

$$\phi^i(z) = \mathbf{N}_\phi^i \boldsymbol{\phi}^i \quad (4.23)$$

where \mathbf{N}_ϕ^i is the shape functions for the electric potential with $p = 1$, and $\boldsymbol{\phi}^i$ is the vector containing the electric potentials at the top and bottom surfaces of the i -th sublayer, $\boldsymbol{\phi}^i = [\phi^{i-1} \quad \phi^i]$ ($i = 1, 2, \dots, n_{sub}$) in which n_{sub} is the number of piezoelectric layers.

For each piezoelectric sublayer element, values of electric potentials are assumed to be equal at the same height along the thickness. The electric field \mathbf{E} can be rewritten as

$$\mathbf{E} = -\nabla \mathbf{N}_\phi^i \boldsymbol{\phi}^i = -\mathbf{B}_\phi \boldsymbol{\phi}^i \quad (4.24)$$

in which

$$\mathbf{B}_\phi = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & \frac{1}{h_p} \end{matrix} \right\} \quad (4.25)$$

Note that, for the type of piezoelectric materials considered in this work the piezoelectric constant matrix \mathbf{e} and the dielectric constant matrix \mathbf{g} of the k^{th} orthotropic layer in the local coordinate system are written as follows

$$\mathbf{e}^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(k)}; \quad \mathbf{g}^{(k)} = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (4.26)$$

However, the laminate is usually made of several orthotropic layers with different directions of orthotropy and consequently different characteristic directions for the dielectric and piezoelectric properties. So, the piezoelectric

stress constant matrix for the k^{th} orthotropic lamina in the global coordinate system is given by

$$\mathbf{e}^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{15} & 0 & 0 \\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{32} & \bar{e}_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(k)} ; \quad \mathbf{g}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{p}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{p}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{p}_{33} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (4.27)$$

where \bar{e}_{ij} and \bar{p}_{ii} are transformed material constants of the k^{th} lamina and are calculated similarly to \bar{Q}_{ij} .

4.5 Governing equations of motion

The elementary governing equation of motion can be derived in the following form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{d}} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & -\mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{uu} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \mathbf{c} \mathbf{B}_u \, d\Omega & ; & \quad \mathbf{K}_{u\phi} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{B}_{\phi} \, d\Omega \\ \mathbf{K}_{\phi\phi} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\phi}^T \mathbf{g} \mathbf{B}_{\phi} \, d\Omega & ; & \quad \mathbf{M}_{uu} = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{m} \tilde{\mathbf{N}} \, d\Omega \end{aligned} \quad (4.29)$$

in which

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_m^T & \mathbf{z} \mathbf{e}_m^T & f(z) \mathbf{e}_m^T & \mathbf{e}_s^T & f'(z) \mathbf{e}_s^T \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}_m &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}; \mathbf{e}_s = \begin{bmatrix} 0 & e_{15} \\ e_{15} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Since the electric field \mathbf{E} exists only according to the z direction, $\mathbf{K}_{u\phi}$ in Eq.(4.29) can be rewritten as

$$\mathbf{K}_{u\phi} = \int_{\Omega} \left((\mathbf{B}^m)^T e_m^T \mathbf{B}_{\phi} + z (\mathbf{B}^{b1})^T e_m^T \mathbf{B}_{\phi} + f(z) (\mathbf{B}^{b2})^T e_m^T \mathbf{B}_{\phi} \right) d\Omega \quad (4.31)$$

Substituting the second line of Eq. (4.28) into the first line, the shortened form is obtained as

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \left(\mathbf{K}_{uu} + \mathbf{K}_{u\phi} \mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{K}_{\phi u} \right) \mathbf{d} = \mathbf{F} + \mathbf{K}_{u\phi} \mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{Q} \quad (4.32)$$

4.6 Active control analysis

A composite plate integrated piezoelectric with n ($n \geq 2$) layers is considered (See Figure 4.1). The sensor layer at the bottom is denoted with the subscript s and the charge $Q = 0$.

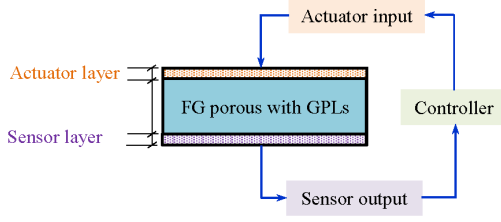


Figure 4.1. A schematic diagram of a laminated plate with integrated piezoelectric sensors and actuators.

The constant gains G_d and G_v of the control of displacement feedback and that of velocity one is hence used to couple the input actuator voltage vector ϕ_a and the output sensor voltage vector ϕ_s as

$$\phi_a = G_d \phi_s + G_v \dot{\phi}_s \quad (4.33)$$

Without the external charge Q , the generated potential on the sensor layer can be derived from the second equation of Eq. (5.6) as

$$\phi_s = \left[\mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \right]_s \left[\mathbf{K}_{\phi u} \right]_s \mathbf{d}_s \quad (4.34)$$

Eq.(4.34) above shows that, when an external force deforms the plate, in the sensor layer the electric charges are generated in the sensor layer and then amplified through the closed loop control to be converted into the signal. This signal is then sent to the distributed actuator and generates an input voltage for the actuators. Finally, a resultant force arises through the converse piezoelectric effect and this force actively controls the static response of the laminated composite plate.

Substituting Eqs. (4.33)–(4.34) for Eq. (4.28), one obtains

$$\mathbf{Q}_a = \left[\mathbf{K}_{uu} \right]_a \mathbf{d}_a - G_d \left[\mathbf{K}_{\phi\phi} \right]_a \left[\mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \right]_s \left[\mathbf{K}_{\phi u} \right]_s \mathbf{d}_s - G_v \left[\mathbf{K}_{\phi\phi} \right]_a \left[\mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \right]_s \left[\mathbf{K}_{\phi u} \right]_s \dot{\mathbf{d}}_s \quad (4.35)$$

Substituting Eqs. (4.33) and (4.35) into Eq. (4.32), one writes

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}^*\mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (4.36)$$

where

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_{uu} + G_d \left[\mathbf{K}_{u\phi} \right]_s \left[\mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \right]_s \left[\mathbf{K}_{\phi u} \right]_s \quad (4.37)$$

and the active damping matrix, \mathbf{C} , can be computed by

$$\mathbf{C} = G_v \left[\mathbf{K}_{u\phi} \right]_a \left[\mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \right]_s \left[\mathbf{K}_{\phi u} \right]_s \quad (4.38)$$

Without effect of the structural damping, Eq. (4.36) can be rewritten as

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}^*\mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (4.39)$$

For static analyses, Eq. (4.39) reduces to

$$\mathbf{K}^*\mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (4.40)$$

4.7 Results and discussions

4.7.1 Laminated composite plate

A four-layer $[0^0/90^0/90^0/0^0]$ fully simply supported square laminated plate subjected to a sinusoidal pressure defined as $q(x, y) = q_0 \sin(\frac{\pi x}{a}) \sin(\frac{\pi y}{b})$ is considered. The length to width ratio is $a/b = 1$ and the length to thickness ratios are $a/h = 4, 10, 20$ and 100 , respectively. Material $E_1 = 25E_2, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2, \nu_{12} = 0.25$.

The normalized displacement and stresses are defined as

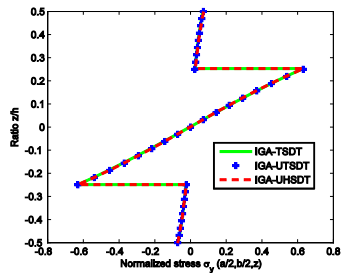
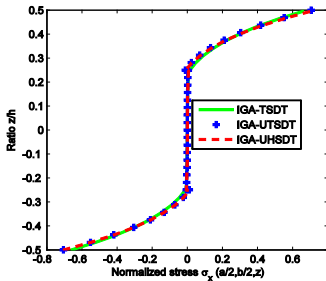
$$\begin{aligned} \bar{w} &= (100E_2h^3)w(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0) / qa^4; \bar{\sigma}_{xx} = \frac{h^2}{qa^2} \sigma_{xx}(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{h}{2}); \bar{\sigma}_{yy} = \frac{h^2}{qa^2} \sigma_{yy}(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{h}{4}) \\ \bar{\sigma}_{xy} &= \frac{h^2}{qa^2} \sigma_{xy}(0, 0, \frac{h}{2}); \bar{\sigma}_{xz} = \frac{h}{qa} \sigma_{xz}(0, \frac{a}{2}, 0); \bar{\sigma}_{yz} = \frac{h}{qa} \sigma_{yz}(\frac{a}{2}, 0, 0) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Table 4.1 displays the obtained results along with other solutions for the normalized displacement and stresses. The obtained results based on the proposed model are compared with those of the other reference ones based on the unconstrained third-order theory using Navier's series solution (UTSDT) and using the numerical solution of RPIM-UTSDT. Additionally, IGA-UTSDT is also compared with the Reddy's analytical solutions- TSDT and the exact 3D elasticity approach of Pagano. It is found that IGA-UTSDT is a stronger competitor than other reference numerical techniques for all ratios a/h . Comparing with IGA-UTSDT, IGA-UTSDT gives the results slightly better, especially for thick plates. Normalized displacement and stresses of the proposed method conform well to the analytical solutions. For a thick plate with $a/h = 4$ and 10 , the obtained results are more accurate than other reference solutions. They even move beyond TSDT by Reddy. Moreover, the shear stresses of the proposed model are close to those of the exact 3D elasticity solution.

Figure 4.2 plots the distribution of stresses through the thickness of a four-layer square plate with $a/h = 4$. It can be seen that our results match well with those of the IGA-TSDT solutions. Notably, the transverse shear stresses of UTSDT and UITSDT based on IGA are non-zero at the top and bottom surfaces of the plate. This discrepancy is owing to that by using UTSDT and UITSDT, the transverse shear stresses relax at the boundary layer. However, such a non-zero amount (Table 4.1 and Figure 4.2) is only slight. Thus, the obtained results are accurate under bending loads, whereas contact friction or a flow field along the boundary layer is not within the research scope of this thesis. Efforts are underway to investigate the behavior of UITSDT in the presence of surface shear traction.

Table 4.1: Normalized displacement and stresses of a simply supported $[0^0/90^0/90^0/0^0]$ square laminated plate under a sinusoidally distributed load.

a/h	Method	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{\sigma}_{yz}$
4	TSDT	1.8937	0.6651	0.6322	0.044	0.2064	0.2389
	RPIM-UTSDT	1.9024	0.7044	0.6297	0.0478	0.2169	0.2494
	UTSDT	1.9023	0.7057	0.6309	0.0461	0.2064	0.2389
	IGA-UTSDT	1.9023	0.7040	0.6294	0.0461	0.2138	0.2460
	IGA- UITSDT	1.9031	0.7041	0.6296	0.0460	0.2142	0.2462
	Elasticity	1.9540	0.7200	0.6630	0.0467	0.2190	0.2910
10	TSDT	0.7147	0.5456	0.3888	0.0268	0.2640	0.1531
	RPIM-UTSDT	0.7204	0.5599	0.3903	0.0280	0.2887	0.1580
	UTSDT	0.7204	0.5609	0.3911	0.0273	0.2843	0.1593
	IGA-UTSDT	0.7204	0.5596	0.3901	0.0273	0.2842	0.1593
	IGA- UITSDT	0.7204	0.5596	0.3902	0.0274	0.2832	0.1612
	Elasticity	0.7430	0.5590	0.4010	0.0275	0.3010	0.1960
20	TSDT	0.5060	0.5393	0.3043	0.0228	0.2825	0.1234
	RPIM-UTSDT	0.5077	0.5425	0.3046	0.0233	0.3120	0.1167
	UTSDT	0.5078	0.5436	0.3052	0.0230	0.3066	0.1279
	IGA-UTSDT	0.5078	0.5424	0.3045	0.0229	0.3066	0.1278
	IGA- UITSDT	0.5078	0.5424	0.3045	0.0229	0.3079	0.1278
	Elasticity	0.5170	0.5430	0.3090	0.0230	0.3280	0.1560
100	TSDT	0.4343	0.5387	0.2708	0.0213	0.2897	0.1117
	RPIM-UTSDT	0.4321	0.5351	0.2700	0.0220	0.2986	0.0704
	UTSDT	0.4344	0.5389	0.2709	0.0214	0.3154	0.1153
	IGA-UTSDT	0.4344	0.5376	0.2702	0.0213	0.3153	0.1152
	IGA- UITSDT	0.4344	0.5389	0.2709	0.0213	0.3153	0.1152
	Elasticity	0.4347	0.5390	0.2710	0.0214	0.3390	0.1410



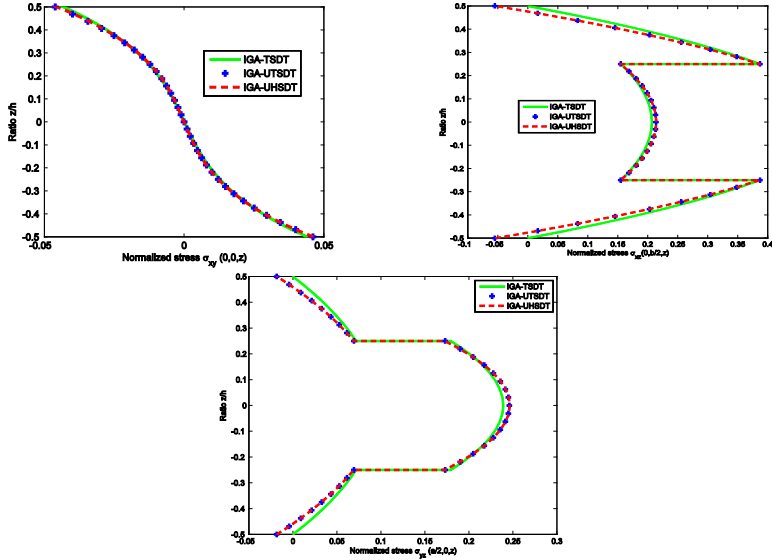


Figure 4.2. Comparison of the normalized stress distributions through the thickness of a four-layer $[0^{\circ}/90^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}]$ laminated composite square plate ($a/h = 4$).

4.7.2 Piezoelectric laminated composite plate

A simply supported square laminated plate ($20\text{ cm} \times 20\text{ cm}$) subjected to a uniform load $q = 100\text{ N/m}^2$ is considered. This plate is bonded by piezoelectric ceramics on both the lower and upper surfaces symmetrically. It consists of four composite layers and two outer piezo-layers denoted by pie . The laminate configuration of the composite plate is $[pie/-\theta/\theta]_s$ and $[pie/-\theta/\theta]_{as}$ where subscript “ s ” indicates symmetric laminate, and the subscript “ as ” anti-symmetric laminate, and θ is the fiber orientation angle of the layers. The non-piezoelectric composite plate is 1 mm thick, and its layers have the same thickness each. The piezo-layer has the thickness of 0.1 mm .

The SSSS piezoelectric composite plate with different fiber orientation angles including $[pie/-15/15]_{as}$, $[pie/-30/30]_{as}$, $[pie/-45/45]_{as}$ and $[pie/-45/45]_s$ is investigated. A control Bézier mesh with 13×13 quadratic elements should be used here. Table 4.2 displays the central point deflection of the piezoelectric composite plate subjected to the uniform load and different input voltages. The results of IGA-UTSDT can be seen to agree well with those of references used CS-DSG3 and RPIM method. And Figure 4.3 shows the deflection of the plate with various input voltages 0 V , 5 V , 8 V , 10 V . The deflection decreases to increase the input voltage as expected. It’s because the input voltage induces an upward

deflection of the plate due to the piezoelectric effect. This upward contribution becomes prevalent for an input voltage of 10V. Again, it can be seen that the obtained results and those of references are the same. In addition, the fiber orientation angle increases, the deflection of the plate decreases.

Table 4.2: Central control point/node deflection of the simply supported piezoelectric composite plate subjected to a uniform load and different input voltages ($\times 10^{-4}$ m).

Input voltage	Scheme	Method			
		CS-DSG3	RPIM	IGA-USSDT	IGA-UITSDT ($p = 3$)
0V	$[pie / -45/45]_s$	-0.6326	-0.6038	-0.6230	-0.6356
	$[pie / -45/45]_{as}$	-0.6323	-0.6217	-0.6205	-0.6139
	$[pie / -30/30]_{as}$	-0.6688	-0.6542	-0.6572	-0.6656
	$[pie / -15/15]_{as}$	-0.7442	-0.7222	-0.7400	-0.7436
5V	$[pie / -45/45]_s$	-0.2863	-0.2717	-0.2767	-0.2845
	$[pie / -45/45]_{as}$	-0.2801	-0.2717	-0.2744	-0.2820
	$[pie / -30/30]_{as}$	-0.2957	-0.2862	-0.2882	-0.2965
	$[pie / -15/15]_{as}$	-0.3259	-0.3134	-0.3192	-0.3281
10V	$[pie / -45/45]_s$	0.0721	0.0757	0.0788	0.0689
	$[pie / -45/45]_{as}$	0.0601	0.0604	0.0720	0.0602
	$[pie / -30/30]_{as}$	0.0774	0.0819	0.0805	0.0686
	$[pie / -15/15]_{as}$	0.0924	0.0954	0.1015	0.0887

Figure 4.3 shows the deflection of the plate with various input voltages 0V, 5V, 8V, 10V. The deflection decreases to increase the input voltage as expected. It's because the input voltage induces an upward deflection of the plate due to the piezoelectric effect. This upward contribution becomes prevalent for an input voltage of 10V. Again, it can be seen that the obtained results and those of references are the same. In addition, the fiber orientation angle increases, the deflection of the plate decreases. For the input electric voltage of 10V, the profile of deflection of the plate is different from those with other electric voltages due

to the electric field vector \mathbf{E} generates the electric field force. This electric field force is opposite to the mechanical force. Therefore, with the same mechanical loading the bigger of the input voltage make the smaller of displacement. However, it should be limited the value of the input voltage in order to restrict the demolition of structures.

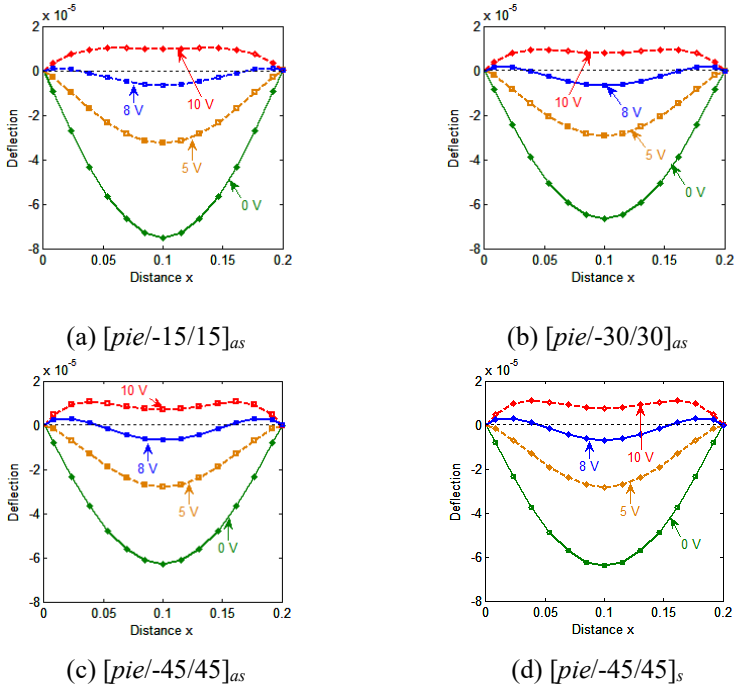


Figure 4.3. Centerline deflection of a simply supported piezoelectric composite plate subjected uniform load and different input voltages.

Now, a piezoelectric composite plate subjected to a uniform load $q = 100 \text{ N/m}^2$ with the geometry, boundary conditions and material properties as above example is considered. The stacking sequence of the composite plate is $[\text{pie}/-45/45]_s$. The control of the static deflection of plate is studied. In Figure 4.4, it can be seen the effect of the displacement feedback control gain G_d on the static deflection of the plate, and that when G_d becomes bigger, the deflections become smaller. The explanation of this is that when the external load deforms the plate, electric charges are generated in the sensor layer; they are then amplified through the closed-loop control. The converted signal is then sent to the distributed actuator and generates an input voltage for the actuator. A resultant force is generated

through the converse piezoelectric effect and this force actively controls the static response of the laminated plate.

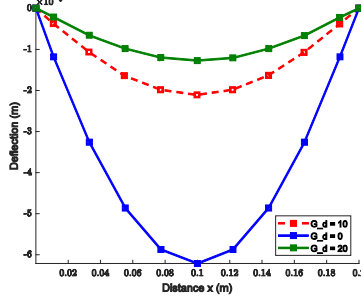


Figure 4.4. Effect of the gain G_d of the displacement feedback control on static deflections of the piezoelectric composite plate.

CHAPTER 5: ANALYSIS AND CONTROL THE RESPONSES OF PIEZOELECTRIC FUNCTIONALLY GRADED POROUS PLATES REINFORCED BY GRAPHENE PLATELETS

5.1 Introduction

In this chapter, for the first time an isogeometric Bézier finite element for bending and transient analyses of functionally graded porous (FGP) plates reinforced by graphene platelets (GPLs) embedded in piezoelectric layers is presented. It is named as PFGP-GPLs for a short. Both linear and nonlinear responses of structures are given. The plates are constituted by a core layer, which contains the internal pores and GPLs dispersed in the metal matrix either uniformly or non-uniformly according to three different patterns, and two piezoelectric layers perfectly bonded on the top and bottom surfaces of host plate. A generalized C^0 -type higher-order shear deformation theory (C^0 – type HSDT) is used. In addition, the present theory is developed further to analyze and control geometrically nonlinear responses of PFGP-GPLs plates. Then, a constant displacement and velocity feedback control approaches are adopted to active control the geometrically nonlinear static as well as the dynamic responses of the FG porous plates, where the effect of the structural damping is considered, based on a closed - loop control with piezoelectric sensors and actuators.

5.2. Theory and formulation of PFGP-GPLs plate

For a plate bending, the strain vector is presented by

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (5.1)$$

Employing the von Kármán assumptions, the strain-displacement relations can be rewritten as

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \left\{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy} \right\}^T = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + z\boldsymbol{\varepsilon}^1 + f(z)\boldsymbol{\varepsilon}^2; \\ \boldsymbol{\gamma} &= \left\{ \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \right\}^T = \boldsymbol{\varepsilon}^{s0} + f'(z)\boldsymbol{\varepsilon}^{s1}\end{aligned}\quad (5.2)$$

where

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^0 &= \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_{,x}^2 \\ w_{,y}^2 \\ 2w_{,xy} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}^0_L + \boldsymbol{\varepsilon}^0_{NL} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^1 = - \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix}; \\ \boldsymbol{\varepsilon}^2 &= \begin{Bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{s0} = \begin{Bmatrix} w_{0,x} - \beta_x \\ w_{0,y} - \beta_y \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{s1} = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (5.3)$$

in which the nonlinear component is computed as

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_{,x} & 0 \\ 0 & w_{,y} \\ w_{,y} & w_{,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{A}_\theta \boldsymbol{\theta} \quad (5.4)$$

5.3. Approximation of mechanical displacements

Based on the Bézier extraction of NURBS, the mechanical displacement field of the FG porous plate can be approximated as follows

$$\mathbf{u}^h(\xi, \eta) = \sum_A^{m \times n} R_A^e(\xi, \eta) \mathbf{d}_A \quad (5.5)$$

where $n \times m$ is the number of basis functions. Meanwhile $R_A^e(\xi, \eta)$ denotes a NURBS basis function presented in the consistent form of the linear grouping of Bézier extraction operator and Bernstein polynomials and $\mathbf{d}_A = [u_{0,A} \quad v_{0,A} \quad w_A \quad \beta_{xA} \quad \beta_{yA} \quad \theta_{xA} \quad \theta_{yA}]^T$ is the vector of nodal degrees of freedom associated with control point A.

By substituting Eq. (5.5) for Eq. (3.13) the in-plane and shear strains can be rewritten as

$$[\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\gamma}]^T = \sum_{A=1}^{m \times n} \left(\mathbf{B}_A^L + \frac{1}{2} \mathbf{B}_A^{NL} \right) \mathbf{d}_A \quad (5.6)$$

where $\mathbf{B}_A^L = [\mathbf{B}_A^1 \quad \mathbf{B}_A^2 \quad \mathbf{B}_A^3 \quad \mathbf{B}_A^{s_1} \quad \mathbf{B}_A^{s_2}]^T$

$$\mathbf{B}_A^1 = \begin{bmatrix} R_{A,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{A,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_{A,y} & R_{A,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_A^2 = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & R_{A,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{A,y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{A,y} & R_{A,x} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{A,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{A,y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{A,y} & R_{A,x} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\mathbf{B}_A^{s1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{A,x} & -R_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{A,y} & 0 & -R_A & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_A^{s2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_A \end{bmatrix}$$

and \mathbf{B}_A^{NL} is calculated by

$$\mathbf{B}_A^{NL} = \begin{bmatrix} w_{A,x} & 0 \\ 0 & w_{A,y} \\ w_{A,y} & w_{A,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{A,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{A,x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_\theta \mathbf{B}_A^g \quad (5.8)$$

5.4 Governing equations of motion

The elementary governing equation of motion can be derived in the following form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{d}} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & -\mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

where

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}^L + \mathbf{B}^{NL})^T \mathbf{c} (\mathbf{B}^L + \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL}) d\Omega \quad ; \quad \mathbf{K}_{u\phi} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}^L)^T \mathbf{e}^T \mathbf{B}_\phi d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_\phi^T \mathbf{p} \mathbf{B}_\phi d\Omega \quad ; \quad \mathbf{M}_{uu} = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{m} \tilde{\mathbf{N}} d\Omega \quad ; \quad \mathbf{f} = \int_{\Omega} \bar{q}_0 \bar{\mathbf{N}} d\Omega \quad (5.10)$$

5.5 Numerical results

5.5.1 Analyze the linear responses of FGP-GPL plate

In this example, a SSSS FGP-GPL plate with 0.2 m in length and 0.01 m in thickness is studied to verify this approach. For this problem, the FG plate is subjected to the transverse load sinusoidally distributed in the spatial domain and varying with time including step, triangular, sinusoidal and explosive blast loads in which $t_1 = 0.003$ s ; $\gamma = 330$ s⁻¹ and $q_0 = 15$ MPa. The chosen time step $\Delta t = 2.10^{-5}$ in this study. The plate is bonded by piezoelectric layers on both the

upper and lower surfaces of the plate, called PFGP-GPL, with the thickness of each piezoelectric layer $h_p = 1\text{mm}$. In this example, the effect of the different porosity coefficients on the transient responses of FGP-GPL and PFGP-GPL plates is also examined with the porosity distribution 1 in case of $\Lambda_{GPL} = 0$ and $\Lambda_{GPL} = 1\text{wt}\%$, respectively. The time histories of the normalized central deflection of FGP-GPL and PFGP-GPL plates are shown in Figure 5.1 and Figure 5.2 respectively. It is found that the amplitude of dynamic response in case of PFGP-GPL plate is smaller than in case of FGP-GPL plate while the porous plate gives the deflection bigger than the solid plate. Note that this comparison is given because the thickness of the piezoelectric layer is very thin. Combined with the piezoelectric material, the dynamic response of structure will be greatly reduced.

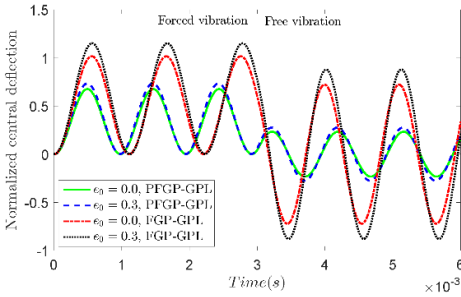


Figure 5.1: Effect of different porosity coefficients to the transient responses of FGP-GPL and PFGP-GPL plate for porosity distribution 1 and $\Lambda_{GPL} = 0$ under step loading.

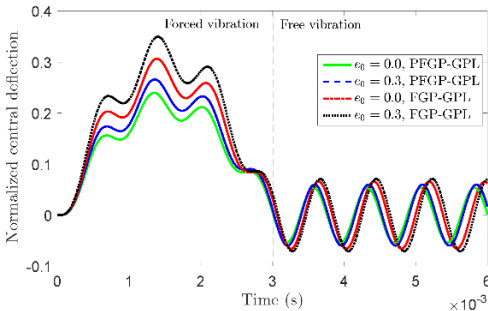


Figure 5.2: Effect of different porosity coefficients to the transient responses of FGP-GPL and PFGP-GPL plate for porosity distribution 1 and $\Lambda_{GPL} = 1\text{wt}\%$ under sinusoidal loading.

Furthermore, the effect of the different weight fraction values on the transient responses of FGP-GPL and PFGP-GPL plate corresponding to uniform porosity distributions with dispersion pattern A and $e_0 = 0.2$ under sinusoidal loading is also depicted in Figure 6.3. Figure 6.4 gives the variation of the normalized central deflections as a function subjected to step loading with various weight fractions for three GPL dispersion patterns, uniform porosity distribution and $e_0 = 0.2$. From Figure 5.3 and Figure 5.4, the PFGP-GPL plate with $\Lambda_{GPL} = 1\text{wt}\%$ provides the smallest normalized central deflection value. In addition, the profile of the

normalized centerline deflection of FGP-GPL and PFGP-GPL plates for some cases with porosity distribution 1, dispersion pattern *A* under the explosive blast loading is plotted in Figure 5.5. Can be observed that the plate with the presence of porosities, reinforced by GPLs and embedded in thin piezoelectric layer provides a very small deflection when compared with other cases. As expected, the combination of porosity distribution 1, the type of GPL dispersion pattern *A* and integration with piezoelectric material is so great in order to decrease the response of structures.

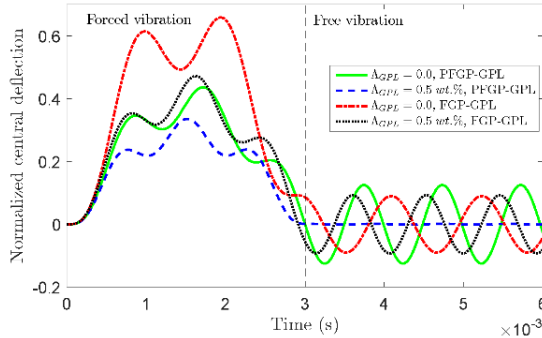


Figure 5.3: Effect of different weight fraction values to the transient responses of FGP-GPL and PFGP-GPL plate for uniform porosity distributions with pattern *A* and $e_0 = 0.2$ under sinusoidal loading.

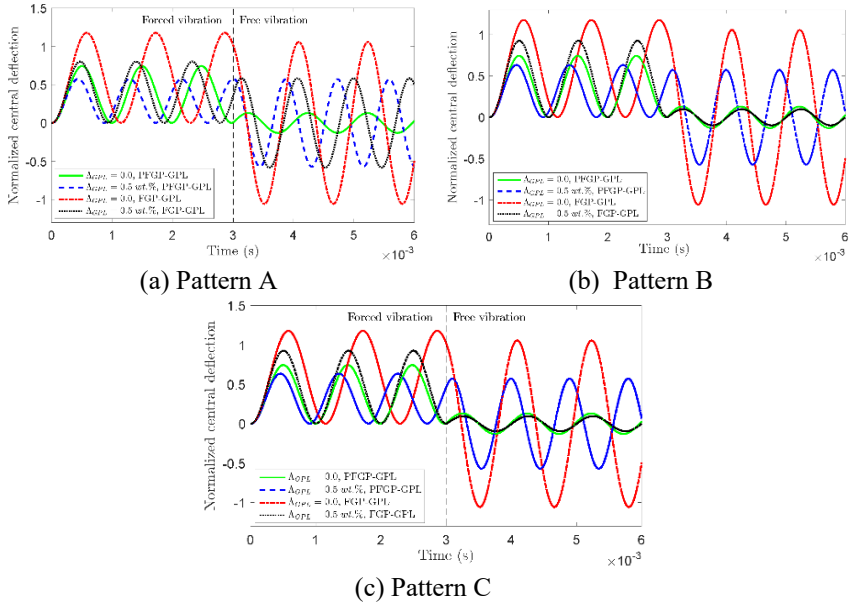


Figure 5.4: Effect of different weight fraction values to the transient responses of FGP-GPL and PFGP-GPL plate for three GPLs dispersion patterns with uniform porosity distribution and $\epsilon_0 = 0.2$ under step loading.

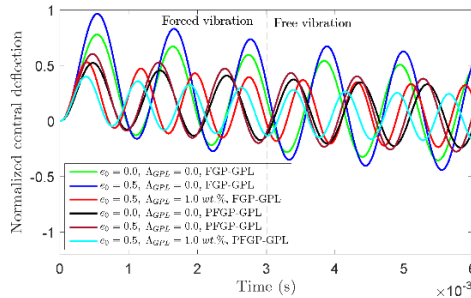


Figure 5.5: The profile of the normalized centerline deflection of FGP-GPL and PFGP-GPL plate for some cases with porosity distribution 1, pattern A under the explosive blast loading.

5.5.2 Analyze and control the nonlinear responses of PFGP-GPL plate

In this section, the active control for the static and dynamic responses of the FG porous plate reinforced by GPLs using integrated sensors and actuators is investigated. Firstly, the active control for the linear static responses of a SSSS FG plate which is subjected to a uniformly distributed load with $q_0 = 100N/m^2$

is investigated to verify the accuracy of the proposed approach. The FG plate composed of Ti-6Al-4V and aluminum oxide materials with material index $n = 2$ and has the side length $a = b = 0.2m$ while the thickness of core FG layer and each piezoelectric layer are taken to be 1 mm and 0.1 mm, respectively. Figure 5.6 illustrates the linear static deflections of the FG plate with various displacement feedback control gains G_d . As can be observed that the present results agree well with the reference solutions who employed the CS-DSG3 based on FSDT. As expected, when the displacement feedback control gain G_d increases, the linear static deflection of the FG plate decreases. Furthermore, the active control for the linear dynamic responses of the FG plate is also investigated based on a constant velocity feedback control algorithm G_v and closed-loop control. In this specific example, the FG plate is initially subjected to a uniform load $q_0 = 100N/m^2$ and then the load is suddenly removed. In this study, the modal superposition is adopted in order to reduce the computational cost and the first six modes are considered in the modal space analysis, while the initial modal damping ratio for each mode is assumed to be 0.8 %. Figure 5.7 shows the linear dynamic responses of the central deflection of the FG plate. The results which are generated from the present method agree well with the reference solution.

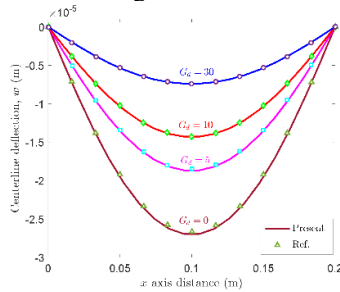


Figure 5.6: Effect of the displacement feedback control gain G_d on the linear static responses of the SSSS plate subjected to uniformly distributed load.

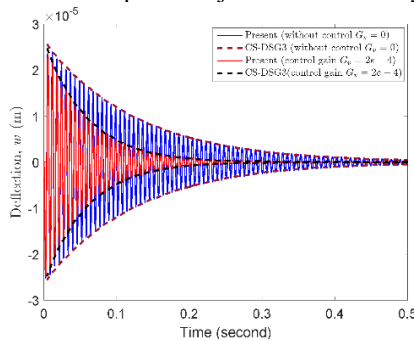


Figure 5.7: Effect of the velocity feedback control gain G_v on the linear dynamic response of the SSSS FG square plate.

Next, the active control for the nonlinear static responses of the SSSS FG porous plate reinforced with GPLs is further investigated in this part. The FG plate consisting of the combination of the porosity distribution 1 and GPL dispersion pattern A , which provides the best structural performance, is selected to study. The plate has a side length $a = b = 0.4m$, the thickness of the FG porous core layer $h_c = 20$ mm and thickness of each piezoelectric layer $h_p = 1$ mm under sinusoidally distributed load which is defined as $q = q_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$ with $q_0 = 1.0MPa$. Figure 5.8 depicts the nonlinear static deflection of the FG porous reinforced by GPLs with the porosity coefficient $e_0 = 0.4$ and the GPL weight fraction $\Lambda_{GPL} = 1.0wt. \%$ corresponding to various displacement feedback control gains. It can be observed that the deflection of the FG porous plate decreases significantly when the displacement feedback control gain increase. In the last example, the active control for the geometrically nonlinear dynamic responses of the CCCC FG porous plate reinforced by GPLs is conducted. The plate has both length and width set the same at $0.2 m$ with the thickness of core layer $h_c = 10$ mm and each piezoelectric layer $h_p = 0.1$ mm. The FG plate with the porosity distribution 1 ($e_0 = 0.4$) and dispersion pattern A ($\Lambda_{GPL} = 1.0wt. \%$) is subjected to sinusoidally distributed transverse loads. Figure 5.9 illustrates the nonlinear dynamic responses of the central deflection of the FG plate corresponding to various velocity feedback control gains G_v . It can be observed that when the control gain G_v is equal to zero corresponding to without control case, the nonlinear dynamic response of the FG porous plate still attenuates with respect to time since the effect of the structural damping is considered in this study. More importantly, the geometrically nonlinear dynamic response can be suppressed faster in the case controlled by higher velocity feedback control gain values. As a result, depending on the specific cases, the responses of the FG porous plate structures including deflection, oscillation time or even both can be controlled to satisfy an expectation by designing an appropriate value for the velocity feedback control gain. It should be noted that the feedback control gain values could not be increased without limit since piezoelectric materials have their own breakdown voltage values. In addition, Figure 5.10 depicts the influence of the velocity feedback control gain G_p on the linear and nonlinear responses of the CCCC FG porous square plate subjected to step load. As expected, the geometrically nonlinear dynamic responses provide smaller magnitudes of the deflection and periods of motion.

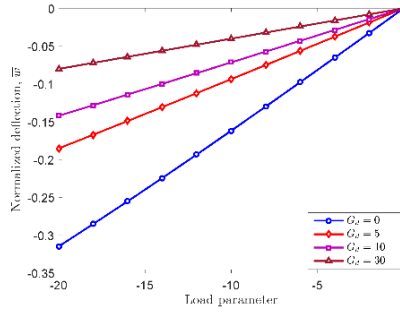


Figure 5.8: Effect of the displacement feedback control gain G_d on the nonlinear static responses of the SSSS FG porous plate with porosity distribution 1 ($e_0 = 0.2$) and dispersion pattern A ($\Lambda_{GPL} = 1wt\%$).

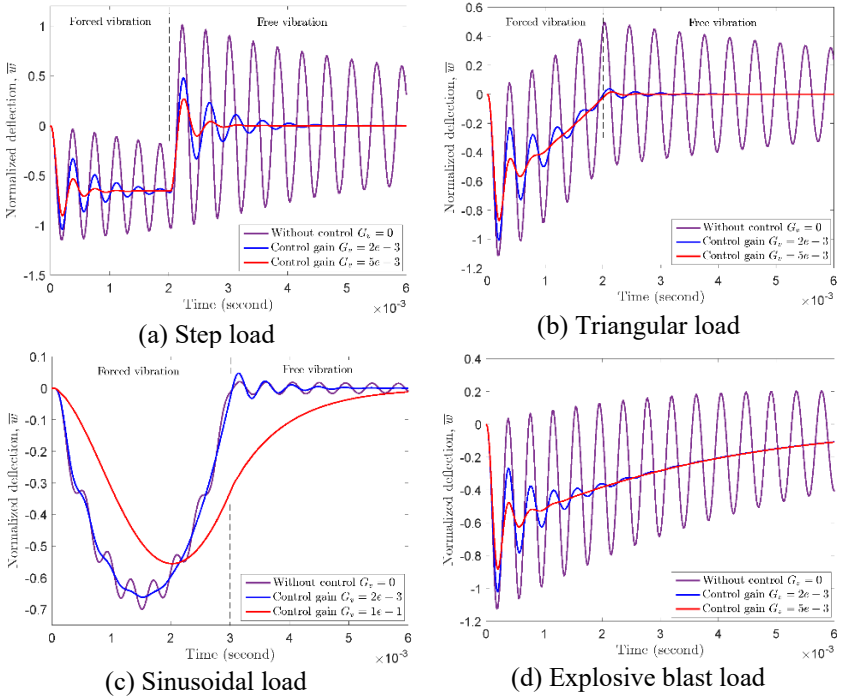


Figure 5.9: Effect of the velocity feedback control gain G_v on the nonlinear dynamic responses of the CCCC FG porous square plate subjected to dynamic loadings.

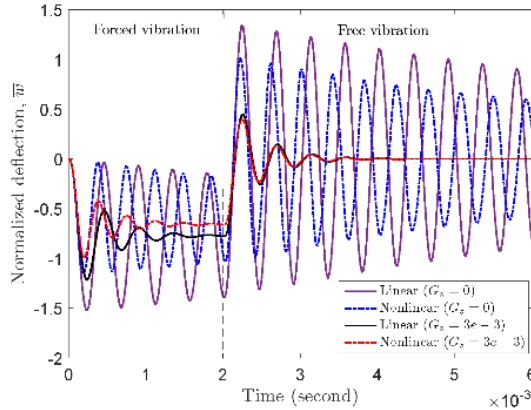


Figure 5.10: Effect of the velocity feedback control gain G_v on the linear and nonlinear dynamic responses of the CCCC FG porous square plate subjected to step load.

CHAPTER 6: FREE VIBRATION ANALYSIS OF THE FUNCTIONALLY GRADED PIEZOELECTRIC MATERIAL POROUS PLATES

6.1. Overview

In this chapter, the functionally graded piezoelectric material (FGPM) plates with the presence of porosities are investigated. It has name the FGPM plate for short. The FGPM plate is made of a mixture of PZT-4 and PZT-5H materials. The FGPM plate is considered in both perfect and imperfect forms. The material properties of FG piezoelectric plate vary continuously in the thickness direction through a modified power-law formulation. Two porosity models, even and uneven distributions, are employed. To satisfy Maxwell's equation in the quasi-static approximation, an electric potential field in the form of a mixture of a cosine and linear variation is adopted. A C^0 -type higher-order shear deformation theory (C^0 -type HSDT) is used in this chapter. An isogeometric finite element method based on Bézier extraction also is performed. The FGPM plates with the influence of external electric voltages, power-law index, porosity coefficient, porosity distribution; geometrical parameters with several complex geometries, aspect ratios, and various boundary conditions are studied. Obtained results are compared with the analytical solution as well as those of several available numerical approaches. In addition, several FGPM plates with curved geometries, which the analytical solution is unknown is studied further, being considered as reference solutions for future work.

6.2. Kinematics of FGPM plates

The function of the electrical potential is chosen so that the distribution of electric and magnetic potentials through the plate thickness is fulfilled Maxwell's equation in the quasi-static approximation by:

$$\Phi(x, y, z, t) = g(z)\phi(x, y, t) + \frac{2z}{h}V_0 e^{i\omega t} \quad (6.1)$$

where V_0 is the applied electric voltage, $g(z)$ is an arbitrary distributed function of z -coordinate, $\phi(x, y, t)$ expresses the function of the electrical potential in reference plane and ω is the eigen value. In this paper, $g(z)$ is given as $g(z) = -\cos(\pi z/h)$.

According to Eq.(6.1), the electric fields (E_x , E_y and E_z) become:

$$\begin{aligned} E_x &= -\Phi_{,x} = -g(z)\phi_{,x} ; E_y = -\Phi_{,y} = -g(z)\phi_{,y} ; \\ E_z &= -\Phi_{,z} = -g'(z)\phi - \frac{2V_0}{h} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (6.2)$$

For a piezo-electrically actuated FG piezoelectric porous plate, the constitutive relations are described by:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{kij}E_k \\ D_i &= e_{ikl}\varepsilon_{kl} + k_{ik}E_k \end{aligned} \quad (6.3)$$

where σ_{ij} , ε_{kl} , D_i and E_k are stress, strain, electric displacement and electric field components, respectively; C_{ijkl} , e_{ijk} and k_{ik} define elastic, piezoelectric and dielectric constants, respectively.

The electric field vector \mathbf{E} can be expressed as

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\phi = -\nabla\phi \quad (6.4)$$

The formulations in Eq.(6.3) are also clearly rewritten following matrix forms as:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^b &= \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & 0 \\ \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{c}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{e}_{31} \\ 0 & 0 & \tilde{e}_{31} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{Bmatrix} = \mathbf{C}^b \boldsymbol{\varepsilon}^b - \mathbf{C}_c^b \mathbf{E} \\ \boldsymbol{\tau}^s &= \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{55} & 0 \\ 0 & \tilde{c}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{e}_{15} & 0 \\ 0 & \tilde{e}_{14} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \end{Bmatrix} = \mathbf{C}^s \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{C}_c^s \mathbf{E}^s \\ \mathbf{D}^p &= \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{e}_{15} & 0 \\ 0 & \tilde{e}_{14} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_c^s \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{C}^k \mathbf{E}^s \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$D^z = \tilde{e}_{31}\varepsilon_x + \tilde{e}_{32}\varepsilon_y + \tilde{k}_{33}E_z$$

where \tilde{c}_{ij} , \tilde{e}_{ij} and \tilde{k}_{ij} define the reduced constants of FGPMP plates and they are expressed by:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{11} &= c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}, \tilde{c}_{12} = c_{12} - \frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}}, \tilde{c}_{66} = c_{66} \\ \tilde{e}_{31} &= e_{31} + \frac{c_{13}e_{33}}{c_{33}}, \tilde{k}_{11} = k_{11}, \tilde{k}_{33} = k_{33} + \frac{e_{33}^2}{c_{33}}\end{aligned}\quad (6.6)$$

Now, Hamilton's principle is used to obtain the governing equations of free vibration for FGPMP plates:

$$\int_0^t (\delta\Pi_S - \delta\Pi_K + \delta\Pi_I) dt = 0 \quad (6.7)$$

where Π_S , Π_K and Π_I are strain energy, kinetic energy and potential energy from initial stress which is generated from applying electric voltage, respectively.

The strain energy $\delta\Pi_S$ is defined as

$$\delta\Pi_S = \int_{\hat{V}} \left(\sigma_{xx} \delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta\varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta\gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta\gamma_{yz} - \dots \right) d\hat{V} \quad (6.8)$$

Substituting Eq. (6.5) into Eq. (6.8), the discrete Galerkin weak form can be rewritten as

$$\begin{aligned}\delta\Pi_S &= \int_{\hat{V}} \left(\left(\delta\mathbf{\varepsilon}^b \right)^T \mathbf{C}^b \mathbf{\varepsilon}^b - \left(\delta\mathbf{\varepsilon}^b \right)^T \mathbf{C}_c^b \mathbf{E}^b + \delta\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{C}^s \boldsymbol{\gamma} - \delta\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{C}_c^s \mathbf{E}^s - \dots \right) d\hat{V} - \\ &\int_{\hat{V}} \left(\delta E_z \right)^T \left(\tilde{e}_{31}\varepsilon_x + \tilde{e}_{32}\varepsilon_y + \tilde{k}_{33}E_z \right) d\hat{V}\end{aligned}\quad (6.9)$$

in which

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z\varepsilon_x^1 + f(z)\varepsilon_x^2; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + z\varepsilon_y^1 + f(z)\varepsilon_y^2 \quad (6.10)$$

Eq. (6.9) can be split into two independent integrals following to middle surface and z-axis direction as:

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_S = & \int_{\Omega} (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^b)^T \hat{\mathbf{C}}^b \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^b d\Omega + \left(\int_{\Omega} (\boldsymbol{\phi}^b)^T \hat{\mathbf{C}}_c^{b1} \boldsymbol{\varepsilon}^0 d\Omega + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\phi}^b)^T \hat{\mathbf{C}}_c^{b2} \boldsymbol{\varepsilon}^1 d\Omega + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\phi}^b)^T \hat{\mathbf{C}}_c^{b3} \boldsymbol{\varepsilon}^2 d\Omega \right) + \\
& \int_{\Omega} (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^s)^T \hat{\mathbf{C}}^s \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^s d\Omega + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\phi}^s)^T \hat{\mathbf{C}}_c^s \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^s d\Omega + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}^s)^T \hat{\mathbf{C}}_c^s \hat{\boldsymbol{\phi}}^s d\Omega + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\phi}^s)^T \hat{\mathbf{C}}^k \hat{\boldsymbol{\phi}}^s d\Omega + \\
& \left(\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_x^0 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{31}^0 \delta\phi^z d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_x^1 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{31}^1 \delta\phi^z d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_x^2 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{31}^2 \delta\phi^z d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_y^0 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{32}^0 \delta\phi^z d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_y^1 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{32}^1 \delta\phi^z d\Omega + \right) \\
& \left. \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_y^2 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{32}^2 \delta\phi^z d\Omega + \int_{\Omega} \phi^z \tilde{k}_{33} \delta\phi^z d\Omega - e^{i\omega t} \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) dz \int_{\Omega} \frac{2V_0}{h} \tilde{k}_{33} \delta\phi^z d\Omega \right)
\end{aligned} \tag{6.11}$$

The left side of Eq. (6. 11) can be rewritten under compact forms as:

$$\delta\Pi_S = \delta\Pi_1 + \delta\Pi_2 + \delta\Pi_3 + \delta\Pi_4 + \delta\Pi_5 + \delta\Pi_6 + \delta\Pi_7 \tag{6.12}$$

where

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_1 &= \int_{\Omega} (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^b)^T \hat{\mathbf{C}}^b \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^b d\Omega; \\
\delta\Pi_2 &= \int_{\Omega} (\boldsymbol{\phi}^b)^T \hat{\mathbf{C}}_c^{b1} \boldsymbol{\varepsilon}^0 d\Omega + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\phi}^b)^T \hat{\mathbf{C}}_c^{b2} \boldsymbol{\varepsilon}^1 d\Omega + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\phi}^b)^T \hat{\mathbf{C}}_c^{b3} \boldsymbol{\varepsilon}^2 d\Omega; \\
\delta\Pi_3 &= \int_{\Omega} (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^s)^T \hat{\mathbf{C}}^s \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^s d\Omega; \quad \delta\Pi_4 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\phi}^s)^T \hat{\mathbf{C}}_c^s \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^s d\Omega; \\
\delta\Pi_5 &= \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}^s)^T \hat{\mathbf{C}}_c^s \hat{\boldsymbol{\phi}}^s d\Omega; \quad \delta\Pi_6 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\phi}^s)^T \hat{\mathbf{C}}^k \hat{\boldsymbol{\phi}}^s d\Omega; \\
\delta\Pi_7 &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_x^0 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{31}^0 \delta\phi^z d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_x^1 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{31}^1 \delta\phi^z d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_x^2 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{31}^2 \delta\phi^z d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_y^0 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{32}^0 \delta\phi^z d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_y^1 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{32}^1 \delta\phi^z d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_y^2 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{32}^2 \delta\phi^z d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \phi^z \tilde{k}_{33} \delta\phi^z d\Omega - e^{i\omega t} \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) dz \int_{\Omega} \frac{2V_0}{h} \tilde{k}_{33} \delta\phi^z d\Omega
\end{aligned} \tag{6.13}$$

For details about each term and approximated formulation, please see the thesis.

6.3. Numerical example

Consider a square domain with a complicated cutout, as shown in Figure 6.1a. Figure 6.1b illustrates a mesh of 336 control points with quadratic Bézier elements. The simply supported and fully clamped boundary conditions are used. First, in order to validate the effectiveness and accuracy of the present solution in comparison with other ones, the FG square plate is studied with a hole of complicated shape which is made of zirconia (ZrO₂-2) and aluminum (Al). Material parameters are given as: $E_c = 200\text{GPa}$; $\nu_c = 0.3$; $\rho_c = 3000\text{kg/m}^3$ and $E_m = 70\text{GPa}$; $\nu_m = 0.3$; $\rho_m = 2707\text{kg/m}^3$, where "c" and "m" are the symbols of ceramic and metal, respectively. The non-dimensional frequency is normalized by $\tilde{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_c / E_c}$. A comparison of the first six non-dimensional frequencies

between the present solution based on 3D elasticity theory using IGA is shown in Table 6.1. Simultaneously, the obtained solution with various power index values is also compared with those reported in reference using mesh-free method with naturally stabilized nodal integration based on TSDT. It can be seen that the present solution has good agreement with that reported in references for both different power index values and two condition boundaries. Non-dimensional frequency parameters decrease with increasing of gradient index values.

Next, behavior of a FGPMP plate is analyzed. Material properties are given in Table 6.1. The non-dimensional frequencies are calculated by $\tilde{\omega} = \omega b^2 / h \sqrt{(\rho / c_{11})_{PZT-4}}$. Numerical solution for non-dimensional frequencies of perfect and imperfect FGPMP plate is listed in Table 6.2 and Table 6.3, respectively. Influence of electric voltages, boundary conditions and power index values on the dimensionless frequency is shown. The obtained results decrease as power index values and electric voltages alter for both SSSS and CCCC BCs. A variation of non-dimensional frequencies versus various side-to-thickness ratios and electric voltages ($\alpha = 0.2, g=5$) is also displayed in Table 6.4. It can be seen that nondimensional frequencies depend strongly on the thickness plate and electric voltages. Obtained values for thick and moderately thick FGPMP plates in accordance with increasing of ratios a/h are increased for all given BCs and electric voltages. However, when the thickness of the plate becomes thinner ($a/h=150, 200, 250$) the effect of the applied voltage is significant. It is found that with the augmentation of a valuable array of the side-to-thickness ratios, the negative value of applied voltage supplies the increasing of the natural frequency, while positive voltage makes the obtained results reduce. Moreover, as $V_0=0$, the natural frequency of FGPMP plates is not much affected by higher values of side-to-thickness ratios. Furthermore, the first six mode shapes and respectively dimensionless frequencies for the CCCC FGPMP-I square plate with a complicated hole ($a/h=50, V_0=0, g=5, \alpha=0.2$) are shown in Figure 6.2.

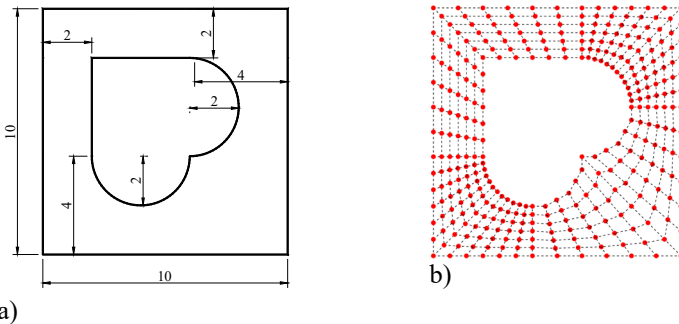


Figure 6. 1. a) Geometry and b) A mesh of 336 control points with quadratic Bézier elements of a square plate with a complicated hole.

Table 6. 1: Comparisons of non-dimensional frequencies $\tilde{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_c / E_c}$ of the FG square plate with a hole of complicated shape ($a=b=10, a/h=20$).

g	Method	Modes					
		1	2	3	4	5	6
a) SSSS BCs							
0	IGA-3D [168]	7.16	11.65	13.09	20.99	21.85	22.54
	Mesh-free [169]	7.1586	11.939	13.398	21.510	22.437	23.426
	Present	7.1919	11.759	13.274	21.260	21.871	22.918
1	IGA-3D [168]	6.58	10.73	12.06	19.35	20.77	20.92
	Mesh-free [169]	6.5853	11.002	12.343	19.828	21.452	21.627
	Present	6.6167	10.838	12.233	19.601	20.915	21.163
5	IGA-3D [168]	6.71	10.88	12.24	19.60	19.73	21.00
	Mesh-free	6.7111	11.148	12.519	20.071	20.252	21.817
	Present	6.7503	11.022	12.443	19.741	19.922	21.460
20	IGA-3D	6.46	10.48	11.79	18.89	19.05	20.25
	Mesh-free	6.5590	10.904	12.243	19.586	19.635	21.348
	Present	6.5932	10.760	12.148	19.091	19.447	20.941
50	IGA-3D	6.19	10.07	11.32	18.15	18.81	19.48
	Mesh-free	6.3642	10.597	11.896	19.089	19.400	20.772
	Present	6.3952	10.446	11.793	18.883	18.910	20.344
100	IGA-3D	6.15	10.00	11.25	18.04	18.78	19.36
	Mesh-free	6.2664	10.442	11.720	18.812	19.332	20.478
	Present	6.2964	10.290	11.616	18.602	18.844	20.047
b) CCCC BCs							
0	IGA-3D	15.8	27.28	27.45	33.22	34.28	41.21
	Mesh-free	16.032	27.280	27.536	33.849	35.196	43.108
	Present	15.979	27.445	27.550	33.535	34.584	41.927
1	IGA-3D	14.62	25.17	25.32	30.68	31.67	38.10
	Mesh-free	14.783	25.188	25.423	31.291	32.540	39.898
	Present	14.737	25.334	25.430	30.996	31.972	38.808
5	IGA-3D	14.79	25.38	25.54	30.83	31.80	38.16
	Mesh-free	14.949	25.374	25.621	31.410	32.646	39.895
	Present	14.971	25.691	25.790	31.362	32.339	39.169

20	IGA-3D	14.41	24.74	24.90	30.07	31.02	37.23
	Mesh-free	14.625	24.830	25.069	30.748	31.962	39.074
	Present	14.612	25.071	25.168	30.594	31.546	38.196
50	IGA-3D	13.8	23.79	23.93	28.95	29.87	35.90
	Mesh-free	14.223	24.174	24.404	29.966	31.154	38.123
	Present	14.190	24.359	24.453	29.744	30.672	37.160
100	IGA-3D	13.64	23.45	23.60	28.56	29.47	35.43
	Mesh-free	14.018	23.839	24.064	29.564	30.738	37.630
	Present	13.980	24.005	24.098	29.322	30.239	36.647

Table 6. 2: The first dimensionless frequency $\tilde{\omega} = \omega b^2 / h \sqrt{(\rho / c_{11})_{PZT-4}}$ of a FGPM square plate with a complicated cutout ($\alpha = 0$) with different electric voltages ($a=b=10, a/h=20$).

V_0	BC	Perfect FGPM					
		$g=0$	$g=1$	$g=5$	$g=20$	$g=50$	$g=100$
-500	SSSS	5.8501	5.4275	5.2457	5.1149	5.0622	5.0409
	CCCC	15.0403	14.0986	13.6657	13.3776	13.2683	13.2248
0	SSSS	5.8497	5.4270	5.2453	5.1143	5.0617	5.0403
	CCCC	15.0400	14.0983	13.6655	13.3773	13.2680	13.2246
500	SSSS	5.8493	5.4265	5.2448	5.1138	5.0613	5.0399
	CCCC	15.0397	14.0980	13.6653	13.3770	13.2678	13.2244

Table 6. 3: The first dimensionless frequency $\tilde{\omega}$ of a square FGMP plate with a complicated cutout ($\alpha = 0.2$) with different electric voltages ($a=b=10, a/h=20$).

V_0	BC	FGMP-I			FGMP-II		
		$g=0$	$g=1$	$g=5$	$g=0$	$g=1$	$g=5$
-					6.0248	5.5644	5.3669
500	SSSS	5.9470	5.4161	5.1898			
	CCCC	15.2538	14.0702	13.5298	15.4377	14.4097	13.9347
0	SSSS	5.9466	5.4156	5.1893	6.0244	5.5639	5.3664
	CCCC	15.2536	14.0700	13.5296	15.4375	14.4095	13.9345
500	SSSS	5.9462	5.4152	5.1889	6.0240	5.5635	5.3660
	CCCC	15.2534	14.0698	13.5294	15.4373	14.4094	13.9343

Table 6. 4. The first dimensionless frequency $\tilde{\omega}$ of a square FGMPMP plate with a complicated cutout with various side-to-thickness ratios ($a=b=10, \alpha = 0.2, g=5$).

BC	a/h	FGMPMP-I			FGMPMP-II		
		$V_0 = -500$	$V_0=0$	$V_0=500$	$V_0 = -500$	$V_0=0$	$V_0=500$
SS	20	5.1898	5.1894	5.1884	5.366	5.366	5.360
SS	50	5.3195	5.3122	5.3048	5.5039	5.4968	5.4897
	100	5.4438	5.3855	5.3265	5.6299	5.5737	5.5168
	150	5.6222	5.4296	5.2281	5.8048	5.6187	5.4247
	200	5.9141	5.4722	4.9818	6.0889	5.6612	5.1901
	250	6.3431	5.4997	4.5101	6.5071	5.6983	4.7426
CC	20	13.5298	13.5296	13.5294	13.934	13.934	13.9343
CC	50	14.2322	14.2292	14.2263	14.694	14.691	14.6888
	100	14.8413	14.5181	14.7948	15.321	15.298	15.2763
	150	15.4552	14.8778	14.5998	15.934	15.359	14.9844
	200	16.1832	14.9018	14.0176	16.656	15.481	14.3038
	250	17.0282	14.9380	13.5174	17.495	15.516	13.8091

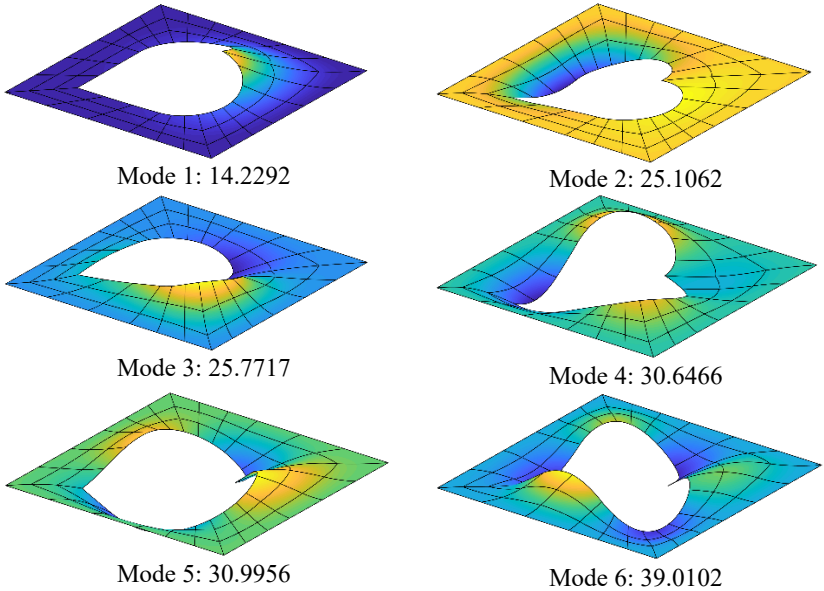


Figure 6. 2. The first six mode shapes of the fully clamped FGMPMP-I square plate with a complicated hole ($a/h=50, V_0=0, g=5, \alpha = 0.2$).

CHAPTER 7: CONCLUSIONS AND RECOMMENDATIONS

7.1 Conclusions

In this dissertation, the author has developed the isogeometric analysis based on Bézier extraction to analyze and control the laminated plate structures. Four material models have been considered including laminated composite plates, piezoelectric laminated composite plates, piezoelectric functionally graded porous plates with graphene platelets reinforcement and functionally graded piezoelectric material porous plates. The dissertation has two parts: a) Analysis and b) Control.

Some main conclusions can be stated as follow:

- The combination of IGA based on Bézier extraction with UHSDT and C^0 -type HSDT for analyzing and controlling the static, free vibration and transient responses for four plate material models has been studied effectively. By using Bézier extraction operator, the implementation of IGA becomes significantly easier with Bernstein basis functions, which have a close resemblance to Lagrange shape functions as using C^0 continuous Bézier elements. This can be a reasonable choice due to the basis functions are given on localized form and the way of implementation in IGA is similar to that in FEM.
- By using the UHSDT and C^0 -type HSDT, the proposed method relaxes the non-zero transverse shear stresses on the lower and upper surface of the plate and no shear correction factor is used. In addition, the HSDT and the CPT bear relation to derivation transverse displacement also called slope components. In some complex geometries with symmetric boundary conditions, it is often difficult to enforce boundary conditions for slope components due to the unification of the approximated variables. So, the seven-dof shear deformation theory is applied in this dissertation.
- In static, free vibration and dynamic analysis, the predictions of the proposed approach agree well with analytical solutions and several available other approaches. Through the analysis, numerical results indicate that the proposed method achieves high reliability as compared with other published solutions and slightly better than the UTSDT using IGA based on Bézier extraction. Interestingly, obtained results match well with extant studies or available solutions in the literature. Furthermore, numerical solutions for PFGPM plates and piezoelectric FG porous reinforced by GPLs have been achieved. It is known that there have not yet been analytical solutions so far, so numerical solutions may be considered as reference solutions for future works.
- Both linear and nonlinear of FG porous reinforced by GPLs with piezoelectric sensors and actuators are investigated. The geometrically

nonlinear equations are solved by the Newton-Raphson iterative procedure and the Newmark's time integration scheme. The influences of the porosity coefficients, weight fractions of GPLs as well as the external electrical voltage on the linear and geometrically nonlinear behaviors of the plates with different porosity distributions and GPL dispersion patterns are evidently investigated through numerical examples. The stiffness of the FG porous plate greatly decreases due to porosity coefficients. However, the stiffness of the plates remarkably increases as the FG porous plate is reinforced by GPLs. The obtained results in term of displacements and periods of motions for the FG porous plate without GPLs are smaller than those achieved for the FG porous plate with GPLs.

- For the first time, an isogeometric Bézier finite element method has been presented for electro-mechanical vibration analysis of functionally graded piezoelectric material porous plates. Through the free vibration analysis, it is observed that external electric voltages, power-law index, porosity coefficient, porosity distribution, geometrical aspect ratios and various boundary conditions significantly affect the natural frequencies of structures.
- The control algorithms based on the constant displacement and velocity feedbacks are applied to control linear and geometrically nonlinear static and dynamic responses of the plates, where the effect of the structural damping is considered, based on a closed-loop control with piezoelectric sensors and actuators. For geometrically nonlinear static response control of the FG porous plates, two effective algorithms are considered such as the input voltage control with opposite signs applied across the thickness of two piezoelectric layers and the displacement feedback control algorithm. In addition, the dynamic responses of the FG porous plate can be expectantly suppressed based on the effectiveness of the velocity feedback control algorithm.
- In this dissertation, in addition to some numerical examples with either square or circle/eclipse, there are various complex geometries which can be modeled easily with multi-patch approach. These complicated geometries can raise the IGA's advantages to the maximum.

7.2 Recommendations

Through the obtained results, it can be believed that the suggested approach with many new points may provide a reliable source of reference for calculating the behaviors of laminated plate structures. However, some restrictions should be mentioned as the suggestions for the potential extension of this work:

- Future research of this work should be done with the presence of shear traction parallel to the surfaces of the plate in the numerical examples (e.g., contact friction or boundary layer flow).
- It's possible to consider various boundary conditions rather than the homogeneous Dirichlet one which only used in this work.

- Another direction of research should be to expand these 2D theories to full-3D or quasi-3D ones.
- The proposed method should be applied to the microstructures using the theory of nonlocal elasticity and that of modified couple stress.
- The IGA can be used to compute for various problems such as incompressibility, phase-field analysis, large deformation with mesh distortion and shape optimization.
- This method should be applied in the industrial field, e.g. to machinery, automobiles, or offshore structures, etc.

LIST OF PUBLICATIONS

- **Articles in ISI-covered journal**

1. **Lieu B. Nguyen**, Chien H. Thai and H. Nguyen-Xuan. A generalized unconstrained theory and isogeometric finite element analysis based on Bézier extraction for laminated composite plates. *Engineering with Computers*, 32(3), pp. 457-475, 2016. (SCIE, Q1).
2. P. Phung-Van, **Lieu B. Nguyen**, L.V. Tran, T.D. Dinh, H.C. Thai, S.P.A. Bordas, M.A. Wahab, H Nguyen-Xuan. An efficient computational approach for control of nonlinear transient responses of smart piezoelectric composite plates. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 76, pp. 190-202, 2015. (SCI, Q1).
3. **Lieu B. Nguyen**, Nam V. Nguyen, Chien H. Thai, A.M. J. Ferreira, H. Nguyen-Xuan. An isogeometric Bézier finite element analysis for piezoelectric FG porous plates reinforced by graphene platelets. *Composite Structure*, 214, pp. 227-245, 2019. (SCIE, Q1).
4. **Lieu B. Nguyen**, Chien H. Thai, A.M. Zenkour, H. Nguyen-Xuan. An isogeometric Bézier finite element method for vibration analysis of functionally graded piezoelectric material porous plates. *International Journal of Mechanical Sciences*, 157–158, pp. 165–183, 2019. (SCI, Q1).
5. Nam V. Nguyen, **Lieu B. Nguyen**, Jaehong Lee, H. Nguyen-Xuan. Analysis and control of geometrically nonlinear responses of piezoelectric FG porous plates with graphene platelets einforcement using Bézier extraction. Submitted in *European Journal of Mechanics / A Solids*, reviewing (SCI, Q1).

- **Articles in national scientific journal**

1. **Lieu B. Nguyen**, Chien H. Thai, Ngon T. Dang, H. Nguyen Xuan. Transient Analysis of Laminated Composite Plates Using NURBS- Based Finite Elements. *Vietnam Journal of Mechanics*, Vol. 36, No. 4, pp.267-281, 2016.

- **International Conference**

1. **Lieu B. Nguyen**, Chien H. Thai, H. Nguyen-Xuan. Isogeometric analysis of laminated composite plates using a new unconstrained theory. *Proceedings of ICEMA-3, Ha Noi City, Viet Nam*, pp. 441-449, 2014.
2. **Lieu B. Nguyen**, Chien H. Thai, H. Nguyen-Xuan. Transient Analysis of Laminated Composite Plates Using Isogeometric Analysis. *Proceedings of GTSD'14, Ho Chi Minh City, Viet Nam*, pp. 73-82, 2014.

- **National Conference**

1. **Lieu B. Nguyen**, Chien H. Thai, H. Nguyen-Xuan. A novel four variable layerwise theory for laminated composite plates based on isogeometric analysis. *Proceedings of the National Conference on Mechanical Engineering, Da Nang City, Viet Nam*, pp. 758-768, 2015.
2. **Lieu B. Nguyen**, H. Nguyen-Xuan. Isogeometric approach for static analysis of laminated composite plates. *Proceedings of the National Conference on science and technology in mechanics IV, Ho Chi Minh City, Viet Nam*, pp. 177-187, 2015.